

DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20220241

布尔控制网络的能观测性综合问题

谢壹冬, 陈晓艳, 韩晓光

(天津科技大学电子信息与自动化学院, 天津 300222)

摘要: 能观测性是布尔控制网络的一个基本性质, 用来描述是否可以通过系统的输入-输出值确定其初始状态. 基于矩阵半张量积和图论技术, 研究了布尔控制网络的能观测性综合问题. 用实例说明了带有外部输入的状态反馈控制器有时可使不能观测的布尔控制网络变为能观测的, 有时不能; 也可使能观测的布尔控制网络变为不能观测的. 最后, 证明了如果存在标准状态反馈控制器使布尔控制网络变为能观测的, 则一定存在带有外部输入的状态反馈控制器使布尔控制网络变为能观测的, 反之不成立.

关键词: 布尔控制网络; 能观测性; 状态反馈; 综合问题; 矩阵半张量积

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 1672-6510(2023)03-0075-06

Synthesis Problem for Observability of Boolean Control Networks

XIE Yidong, CHEN Xiaoyan, HAN Xiaoguang

(College of Electronic Information and Automation, Tianjin University of Science & Technology,
Tianjin 300222, China)

Abstract: Observability is a fundamental property of Boolean control networks, which describes whether the initial state of a system can be determined by its input-output values. In this article we study the observability synthesis of Boolean control networks based on semi-tensor product of matrices and graph theory. With the use of examples, we report the results that state-feedback controller with external input sometimes can first make an unobservable Boolean control network into observable, sometimes not, and then can also make an observable Boolean control network into unobservable. Finally, we prove that if a Boolean control network can be made observable by standard-state feedback controller, then it can also be made observable by state-feedback controller with external input, but the converse does not hold.

Key words: Boolean control networks; observability; state feedback; synthesis problem; semi-tensor product of matrices

1969 年, Kauffman 首次提出了布尔网络^[1]的概念, 用此概念描述蛋白质或基因间的逻辑行为和联系. 布尔网络采用数值“0”(非激活的)或“1”(激活的)对其状态节点进行量化, 使用逻辑函数表征基因之间的相互作用, 并且每个状态节点依靠逻辑函数更新其值. 至今, 布尔网络已经被广泛应用于诸多实际问题, 如细胞分化^[2]、免疫应答^[3]、三神经元网络^[4]及其他领域^[5]. 布尔网络在施加外部输入和系统输出后, 能够扩展为布尔控制网络^[6].

在 2001 年, 程代展研究员提出了矩阵半张量积

(semi-tensor product of matrices, STP)^[7]的概念, 这是一种新的矩阵乘积, 它将矩阵的普通乘法扩展到任意两个矩阵, 使矩阵技术更易于应用到逻辑函数、高维数组和非线性系统等问题. STP 理论已成功应用于布尔控制网络研究中. 利用 STP 技术, 一个布尔控制网络的逻辑行为可等价表示为双线性方程的形式. 基于该双线性方程, 布尔控制网络的一些动态性质得到深入研究, 如能控性^[8]、能观测性^[8-11]、可探测性(也称可重构性)^[11]及其他性质^[12].

能观测性是布尔控制网络的一个基本性质, 4 种

收稿日期: 2022-10-29; 修回日期: 2022-12-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61903274)

作者简介: 谢壹冬(1999—), 男, 山西晋城人, 硕士研究生; 通信作者: 韩晓光, 副教授, hxg-allen@163.com

不同类型的能观测性概念在文献[8–11]中被相继提出. 能观测性描述了是否可以通过输入–输出值确定一个系统的初始状态. Zhang 等^[13]基于加权对图和有限状态自动机的方法设计了一种有效算法,用以验证4种类型的能观测性. 当一个系统不具有能观测性时,研究能观测性综合问题具有重要意义. 为此, Zhang^[14]开启了布尔控制网络能观测性综合问题的研究,证明了状态反馈有时能够增强任意实验能观测性^[11],并给出了这种类型能观测性的标准状态反馈控制器的设计算法. 本文关注的是多实验能观测性^[10],研究了标准状态反馈控制器和带有外部输入的状态反馈控制器对这种类型能观测性的影响.

1 预备知识

1.1 基本符号

- (1) \mathbb{N} : 自然数集;
- (2) \mathbb{Z}_+ : 正整数集;
- (3) \mathbb{R} : 实数集;
- (4) $\mathbb{R}^{n \times m}$: $n \times m$ 维实矩阵集合;
- (5) $Col(\mathbf{B})$: 矩阵 \mathbf{B} 的列向量构成的集合;
- (6) \mathcal{D} : 由 0 和 1 组成的集合, 即 $\mathcal{D} = \{0,1\}$;
- (7) $[n,m]$: $\{n,n+1,\dots,m\}$, 其中 $n,m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$;
- (8) δ_n^i : 单位矩阵 I_n 的第 i 列;
- (9) $I_n = \sum_{i=1}^n \delta_n^i$;
- (10) $\Delta_n = \{\delta_n^i \mid i=1,2,\dots,n\}$;
- (11) 若矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 满足 $Col(\mathbf{B}) \in \Delta_n$, 则称其为一个逻辑矩阵. 方便起见, $\mathbf{B} = [\delta_n^{i_1}, \delta_n^{i_2}, \dots, \delta_n^{i_m}]$ 简记为 $\mathbf{B} = \delta_n[i_1, i_2, \dots, i_m]$, 其中 $i_k \in [1,n]$, $1 \leq k \leq m$;
- (12) $\mathcal{L}_{n \times m}$: $n \times m$ 维逻辑矩阵集合.

1.2 矩阵半张量积

设矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, s 为 n 与 p 的最小公倍数, 则矩阵 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 的半张量积定义为: $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = (\mathbf{B} \otimes_{I_{s/n}})(\mathbf{C} \otimes_{I_{s/p}})$, 其中 \otimes 表示 Kronecker 积. 特别当 $n=p$ 时, 有 $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{BC}$, 因此, 普通矩阵乘积是 STP 的一种特殊情况. 方便起见, 在下文中常略去符号“ \times ”.

本文用到 STP 的一些基本性质如下: 考虑两个列向量 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 和 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 则 $\mathbf{X} \times \mathbf{X} = \Phi_m \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$, $\mathbf{Y} \times \mathbf{X} = W_{[m,n]} \mathbf{X} \mathbf{Y}$, 其中 $\Phi_m = [\delta_m^1 \delta_m^1, \delta_m^2 \delta_m^2, \dots, \delta_m^m \delta_m^m]$, $W_{[m,n]} = [I_n \otimes \delta_m^1, I_n \otimes \delta_m^2, \dots, I_n \otimes \delta_m^m]$; 设 $x, y \in \Delta_2$, $\neg x$ 表示 x 的逻辑非运算, $x \vee y$ 表示析取运算, $x \wedge y$ 表示合取运算, $x \rightarrow y$ 表示蕴含运算, 即

$\neg x = M_n x$, $x \vee y = M_d xy$, $x \wedge y = M_c xy$, $x \rightarrow y = M_i xy$, 其中 $M_n = \delta_2[2,1]$, $M_d = \delta_2[1,1,1,2]$, $M_c = \delta_2[1,2,2,2]$, $M_i = \delta_2[1,2,1,1]$. 关于 STP 的更多性质详见文献[15].

1.3 布尔控制网络及其代数形式

本文研究具有 n 个状态节点、 m 个输入节点和 q 个输出节点的布尔控制网络, 其动态方程表示为

$$\begin{cases} x_i(t+1) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_i(t)$ 、 $y_j(t)$ 和 $u_k(t)$ 分别表示 t 时刻的状态节点、输出节点和输入节点, 即 $x_i(t) \in \mathcal{D}$, $y_j(t) \in \mathcal{D}$, $u_k(t) \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{N}$; $f_i: \mathcal{D}^{n+m} \rightarrow \mathcal{D}$ 和 $h_j: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^q$ 分别表示状态和输出逻辑函数, $i \in [1,n]$, $k \in [1,m]$.

在 STP 框架下, 方程(1)等价地转换为

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = L\tilde{x}(t)\tilde{u}(t) = [L_1, L_2, \dots, L_N] \tilde{x}(t)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = H\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\tilde{x}(t)$ 、 $\tilde{y}(t)$ 和 $\tilde{u}(t)$ 分别表示 t 时刻基于向量形式的状态、输出和输入, 即 $\tilde{x}(t) \in \Delta_N$, $\tilde{y}(t) \in \Delta_Q$, $\tilde{u}(t) \in \Delta_M$, $t \in \mathbb{N}$; L 和 H 分别为转移矩阵和输出矩阵, 即 $L \in \mathcal{L}_{N \times NM}$, $H \in \mathcal{L}_{Q \times N}$, $L_i \in \mathcal{L}_{N \times M}$, $i \in [1,N]$; 为方便计, 令 $N=2^n$, $Q=2^q$, $M=2^m$. 更多细节内容见文献[16].

1.4 有限状态自动机

一个确定型有限状态自动机 (deterministic finite-state automaton, DFA) 是一个 5 元组 $A=(S,E,\sigma,s_0,F)$, 其中 S 表示有限状态集, E 表示有限事件集, $s_0 \in S$ 表示初始状态, $F \subseteq S$ 表示最终状态集, $\sigma: S \times E \rightarrow S$ 表示转移函数并且可以扩展为 $\sigma: S \times E^* \rightarrow S$, $E^* = \bigcup_{p=0}^{\infty} E^p$. 有限状态自动机 A 生成的语言表示为 $L(A) = \{\omega \in E^* \mid \sigma(s_0, \omega) \in F\}$. 当 $L(A) = E^*$ 时, 称有限状态自动机 A 是完备的.

1.5 能观测性

在文献[13]中, 作者证明了布尔控制网络的 4 种不同类型能观测性概念两两不等价. 在文献[14]中, 作者讨论了最强类型的能观测性综合问题. 本文研究另一种类型的能观测性 (称为多实验能观测性) 综合问题.

定义 1^[13] 若对于布尔控制网络(2)的任意两个不同初始状态 $\tilde{x}(0)$, $\tilde{x}'(0) \in \Delta_N$, 皆存在一个输入序列 $\tilde{u}(0)\tilde{u}(1)\dots$, 使得对应的输出序列 $\tilde{y}(0)\tilde{y}(1)\dots$ 和 $\tilde{y}'(0)\tilde{y}'(1)\dots$ 不相同, 则称布尔控制网络(2)是多实验能观测的.

注: 在本文表述中, 多实验能观测性简称为能观测性.

定义 2^[13] 布尔控制网络(2)的加权对图描述为一个 3 元组 $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$, 其中顶点集 $\mathcal{V}=\{(\tilde{x}, \tilde{x}') \in \Delta_N \times \Delta_N \mid H\tilde{x}=H\tilde{x}'\}$, 边集 $\mathcal{E}=\{((\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1), (\tilde{x}_2, \tilde{x}'_2)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mid \text{存在 } \tilde{u} \in \Delta_M, \text{ 使得 } L\tilde{x}_1\tilde{u}=\tilde{x}_2 \text{ 且 } L\tilde{x}'_1\tilde{u}=\tilde{x}'_2, \text{ 或者 } L\tilde{x}_1\tilde{u}=\tilde{x}'_2 \text{ 且 } L\tilde{x}'_1\tilde{u}=\tilde{x}_2\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, 加权函数 $\mathcal{W}:\mathcal{E} \rightarrow 2^{\Delta_M}$, $((\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1), (\tilde{x}_2, \tilde{x}'_2)) \in \mathcal{E} \rightarrow \{\tilde{u} \in \Delta_M \mid L\tilde{x}_1\tilde{u}=\tilde{x}_2 \text{ 且 } L\tilde{x}'_1\tilde{u}=\tilde{x}'_2, \text{ 或者 } L\tilde{x}_1\tilde{u}=\tilde{x}'_2 \text{ 且 } L\tilde{x}'_1\tilde{u}=\tilde{x}_2\}$. 当 $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$ 时, 顶点 (\tilde{x}, \tilde{x}') 称为一个非对角顶点; 否则称其为一个对角顶点, 并用记号 \diamond 表示. 值得注意的是, (\tilde{x}, \tilde{x}') 和 (\tilde{x}', \tilde{x}) 表示为同一个顶点.

下例说明了如何计算一个给定布尔控制网络的加权对图.

例 1 考虑布尔控制网络

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \delta_4[1, 4, 2, 4, 4, 3, 2]\tilde{x}(t)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \delta_2[1, 1, 1, 2]\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其加权对图如图 1 所示, 其中顶点 ij 表示状态对 (δ_4^i, δ_4^j) , 每条边的权值 k 表示输入 δ_2^k .

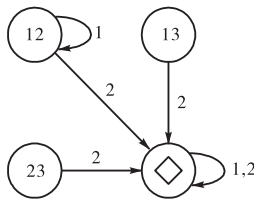


图 1 布尔控制网络(3)的加权对图

Fig. 1 Weighted pair graph of Boolean control network (3)

下面的命题给出了布尔控制网络能观测性的验证方法.

命题 1^[13] 布尔控制网络(2)是不能观测的, 当且仅当其加权对图中存在非对角顶点 (δ_N^i, δ_N^j) 以及由算法 1 生成对应的 DFA $A_{(\delta_N^i, \delta_N^j)}$ 是完备的.

算法 1^[13] 一个新的 DFA 定义为 $A_{(\delta_N^i, \delta_N^j)}$:

- (1) 事件集 Δ_M , 初始状态 (δ_N^i, δ_N^j) ;
- (2) 寻找加权对图中 (δ_N^i, δ_N^j) 可以到达的所有顶点 v , 保留 (δ_N^i, δ_N^j) 生成的子图和这些顶点, 并移除子图外的顶点和转移路径;
- (3) 剩余的顶点构成最终状态集.

例 2 再次考虑布尔控制网络(3), 其加权对图为图 1, 基于算法 1 得到每一个非对角顶点 (δ_4^i, δ_4^j) 对应的 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$, 如图 2 所示. 因为 $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ 是完备的, 根据命题 1, 布尔控制网络(3)是不能观测的.

1.6 状态反馈控制器

考虑布尔控制网络(2), 带有外部输入的状态反馈控制器定义为

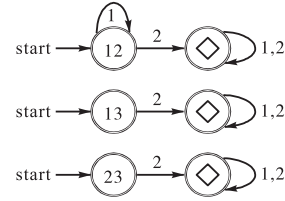


图 2 布尔控制网络(3)每一个非对角顶点对应 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$

Fig. 2 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ of each non-diagonal vertex with respect to Boolean control network (3)

$$u(t) = g(x(t), v(t)) \quad (4)$$

其中 $v(t)$ 表示外部输入, $v(t) \in \mathcal{D}^P$; $g:\mathcal{D}^{N+P} \rightarrow \mathcal{D}^M$ 表示布尔函数, $P \in \mathbb{N}$. 借助于 STP, 控制器(4)可等价转换为

$$\tilde{u}(t) = G\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) = [G_1, G_2, \dots, G_N]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) \quad (5)$$

其中 $\tilde{v}(t) \in \Delta_P$, G 为结构矩阵, 即 $G \in \mathcal{L}_{M \times NP}$, $G_i \in \mathcal{L}_{M \times P}$, $i \in [1, N]$. 将控制器(5)代入布尔控制网络(2)中, 得到闭环系统的代数形式

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = L\tilde{x}(t)G\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) \\ \tilde{y}(t) = H\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (6)$$

方程(6)进一步表示为

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = [L_1G_1, L_2G_2, \dots, L_NG_N]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) \\ \tilde{y}(t) = H\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (7)$$

特别当 $P=1$ 时, 带有外部输入的状态反馈控制器变为标准状态反馈控制器, 即

$$\tilde{u}(t) = G\tilde{x}(t) = [g_1, g_2, \dots, g_N]\tilde{x}(t) \quad (8)$$

在这种情况下, 方程(7)简化为

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = [L_1g_1, L_2g_2, \dots, L_Ng_N]\tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) = H\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $g_i \in \mathcal{L}_{M \times 1}$, $i \in [1, N]$.

2 主要结果

2.1 能观测性综合

在这一小节, 研究带有外部输入的状态反馈控制器(5)对布尔控制网络(2)能观测性的影响. 事实上, 控制器(5)有时可使一个不能观测的布尔控制网络变为能观测的, 有时不能; 反之, 控制器(5)也可以使一个能观测的布尔控制网络变为不能观测的.

首先, 下面例子表明了控制器(5)可使一个不能

观测的布尔控制网络变为能观测的.

例 3 由例 2 可知, 布尔控制网络 (3) 是不能观测的. 若选取带有外部输入的状态反馈控制器

$$\tilde{u}(t) = \delta_2[2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t)$$

将其代入布尔控制网络 (3) 中, 得到闭环系统

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \delta_4[4, 1, 2, 4, 4, 3, 2]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) \\ \tilde{y}(t) = \delta_2[1, 1, 1, 2]\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (10)$$

闭环系统 (10) 的加权对图和每一个非对角顶点对应的 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ 如图 3 所示. 根据命题 1, 闭环系统 (10) 是能观测的.

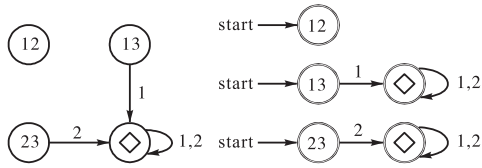


图 3 闭环系统 (10) 的加权对图和每个 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$

Fig. 3 Weighted pair graph and each DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ of closed-loop system (10)

其次, 下面例子表明了控制器 (5) 无法使一个不能观测的布尔控制网络变为能观测的.

例 4 考虑布尔控制网络

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \delta_4[2, 4, 1, 1, 1, 1, 4, 3]\tilde{x}(t)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \delta_2[1, 2, 2, 2]\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (11)$$

其加权对图和每一个非对角顶点对应的 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ 如图 4 所示. 根据命题 1, 布尔控制网络 (11) 是不能观测的. 选取任意带有外部输入的状态反馈控制器

$$\tilde{u}(t) = [G_1, G_2, \dots, G_N]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t)$$

将其代入布尔控制网络 (11) 中, 得到闭环系统

$$\tilde{x}(t+1) = [L_1G_1, L_2G_2, \dots, L_NG_N]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) = [L_1G_1, \delta_4^1 \otimes 1_p^T, \delta_4^1 \otimes 1_p^T, L_4G_4]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) \quad (12)$$

闭环系统 (12) 的状态对 (δ_4^2, δ_4^3) 通过输入 δ_2^1 和 δ_2^2 均可到达对角顶点 (δ_4^1, δ_4^1) . 因此, 对于任意输入序列 $U \in (\Delta_2)^l, l \in \mathbb{Z}_+$, 初始状态 δ_4^2 和 δ_4^3 对应的输出序列均相同. 根据定义 1, 闭环系统 (12) 是不能观测的.

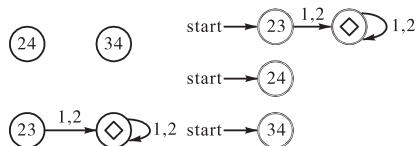


图 4 布尔控制网络 (11) 的加权对图和每个 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$

Fig. 4 Weighted pair graph and each DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ of Boolean control network (11)

最后, 下面例子表明了控制器 (5) 可使一个能观

测的布尔控制网络变为不能观测的.

例 5 考虑布尔控制网络

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \delta_4[2, 4, 3, 1, 4, 3, 1, 3]\tilde{x}(t)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \delta_2[1, 2, 2, 2]\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (13)$$

其加权对图和每一个非对角顶点对应的 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ 如图 5 所示. 根据命题 1, 布尔控制网络 (13) 是能观测的. 若选取带有外部输入的状态反馈控制器

$$\tilde{u}(t) = \delta_2[1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t)$$

将其代入布尔控制网络 (13) 中, 得到闭环系统

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \delta_4[2, 4, 1, 3, 4, 3, 1, 3]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) \\ \tilde{y}(t) = \delta_2[1, 2, 2, 2]\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (14)$$

闭环系统 (14) 的状态对 (δ_4^2, δ_4^4) 通过输入 δ_2^1 和 δ_2^2 分别到达对角顶点 (δ_4^1, δ_4^1) 和 (δ_4^3, δ_4^3) . 因此, 对于任意输入序列 $U \in (\Delta_2)^l, l \in \mathbb{Z}_+$, 初始状态 δ_4^2 和 δ_4^4 对应的输出序列均相同. 根据定义 1, 闭环系统 (14) 是不能观测的.

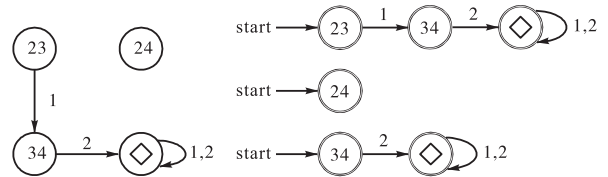


图 5 布尔控制网络 (13) 的加权对图和每个 DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$

Fig. 5 Weighted pair graph and each DFA $A_{(\delta_4^i, \delta_4^j)}$ of Boolean control network (13)

2.2 $P=1$ 和 $P>1$ 状态反馈控制器对能观测性的影响

在文献[14]中, 作者证明了对于一个不满足任意实验能观测性的布尔控制网络 (2), 若存在带有外部输入的状态反馈控制器 ($P>1$) 使其闭环系统满足这种类型的能观测性, 则必然存在标准状态反馈控制器 ($P=1$) 使其闭环系统也满足这种类型的能观测性, 反之亦然. 然而, 这两种类型的状态反馈控制器对布尔控制网络的多实验能观测性有不同的影响.

定理 1 对于不能观测的布尔控制网络 (2), 如果存在标准状态反馈控制器使其对应的闭环系统能观测, 则一定存在带有外部输入的状态反馈控制器使其对应的闭环系统也能观测, 反之不成立.

证明: 设布尔控制网络 (2) 是不能观测的, 若存在标准状态反馈控制器 $\tilde{u}(t) = G\tilde{x}(t) = [g_1, g_2, \dots, g_N]\tilde{x}(t)$ 使闭环系统 (9) 能观测, 则令 $G_i = [g_i, g_i, \dots, g_i], i \in [1, N]$. 显然带有外部输入的状态反馈控制器 $\tilde{u}(t) = G\tilde{x}(t)\tilde{v}(t) = [G_1, G_2, \dots, G_N]\tilde{x}(t)\tilde{v}(t)$ 也可使闭环系统 (7) 能观测. 反之不成立, 详见下例.

例 6 再次考虑例 1 所示的布尔控制网络 (3). 例 3 表明了存在一个带有外部输入的状态反馈控制器可使布尔控制网络 (3) 变为能观测的. 下面证明不存在标准状态反馈控制器 (8) 使布尔控制网络 (3) 变为能观测的. 为此, 罗列所有标准状态反馈控制器

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = \delta_2[1, 1, *, *]\tilde{x}(t)\dots(a) \\ \tilde{u}(t) = \delta_2[1, 2, *, *]\tilde{x}(t)\dots(b) \\ \tilde{u}(t) = \delta_2[2, 1, *, *]\tilde{x}(t)\dots(c) \\ \tilde{u}(t) = \delta_2[2, 2, *, *]\tilde{x}(t)\dots(d) \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\delta_2 \in \Delta_2$. 将控制器 (15) 代入布尔控制网络 (3), 可得所有闭环系统

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \delta_4[1, 2, 4, *]\tilde{x}(t)\dots(a) \\ \tilde{x}(t+1) = \delta_4[1, 4, 4, *]\tilde{x}(t)\dots(b) \\ \tilde{x}(t+1) = \delta_4[4, 2, 4, *]\tilde{x}(t)\dots(c) \\ \tilde{x}(t+1) = \delta_4[4, 4, 4, *]\tilde{x}(t)\dots(d) \\ \tilde{y}(t) = \delta_2[1, 1, 1, 2]\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\delta_4^* \in \{\delta_4^2, \delta_4^3\}$. 每一个闭环系统的加权对图和每个非对角顶点对应的 DFA $A_{(\delta_i^*, \delta_i^*)}$ 如图 6 所示. 因此, 根据命题 1, 闭环系统 (16) 都是不能观测的.

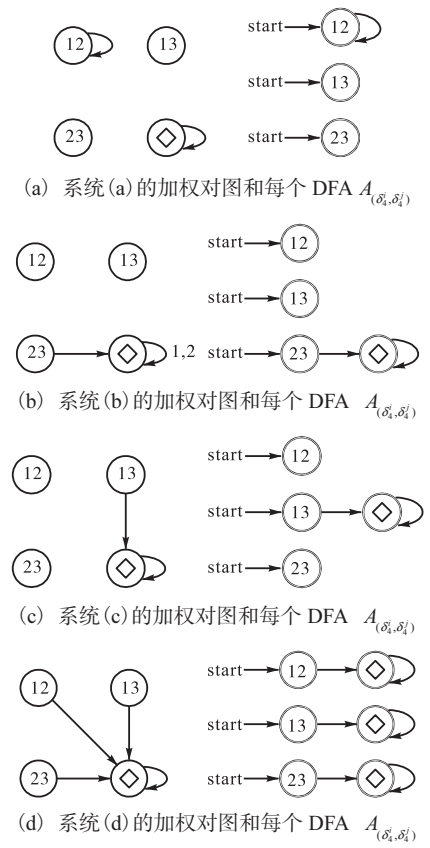


图 6 闭环系统 (16) 中每个系统的加权对图和对应 DFA $A_{(\delta_i^*, \delta_i^*)}$

Fig. 6 Weighted pair graph and corresponding DFA $A_{(\delta_i^*, \delta_i^*)}$ for each system in closed-loop system (16)

3 结 语

本文研究了标准状态反馈控制器和带有外部输入的状态反馈控制器对布尔控制网络多实验能观测性的影响, 并证明了如果存在标准状态反馈控制器使一个不能观测的布尔控制网络变为能观测的, 则一定存在带有外部输入的状态反馈控制器使一个不能观测的布尔控制网络变为能观测的, 反之不成立. 此外, 本文获得的初步研究结果开启了对布尔控制网络多实验能观测性综合问题的研究. 未来工作需要针对一个不能观测的布尔控制网络, 设计一个有效算法, 寻找使该布尔控制网络变为能观测的所有状态反馈控制器.

参考文献:

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of theoretical biology, 1969, 22 (3) : 437-467.
- [2] DEALY S, KAUFFMAN S, SOCOLAR J. Modeling pathways of differentiation in genetic regulatory networks with Boolean networks[J]. Complexity, 2005, 11 (1) : 52-60.
- [3] DIMITROVA E, CAROMILE L A, LAUBENBACHER R, et al. The innate immune response to ischemic injury: a multiscale modeling perspective[J]. BMC Systems biology, 2018, 12 (1) : 1-13.
- [4] LI R, YANG M, CHU T G. Synchronization design of Boolean networks via the semi-tensor product method[J]. IEEE Transactions on neural networks and learning systems, 2013, 24 (6) : 996-1001.
- [5] SCHWAB J D, SIEGLE L, KÜHLWEIN S D, et al. Stability of signaling pathways during aging: a Boolean network approach[J]. Biology, 2017, 6 (4) : 46.
- [6] IDEKER T, GALITSKI T, HOOD L. A new approach to decoding life: systems biology[J]. Annual review of genomics and human genetics, 2001, 2 (1) : 343-372.
- [7] CHENG D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgen's problem[J]. Science in China series: information sciences, 2001, 44 (3) : 195-212.
- [8] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatica, 2009, 45 (7) : 1659-1667.
- [9] CHENG D Z, ZHAO Y. Identification of Boolean control networks[J]. Automatica, 2011, 47 (4) : 702-710.

- [10] ZHAO Y, QI H S, CHENG D Z. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications[J]. *Systems & control letters*, 2010, 59(12) : 767–774.
- [11] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on automatic control*, 2012, 58(6) : 1390–1401.
- [12] LASCHOV D, MARGALOT M. A maximum principle for single-input Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on automatic control*, 2011, 56(4) : 913–917.
- [13] ZHANG K Z, ZHANG L J. Observability of Boolean control networks: a unified approach based on finite automata[J]. *IEEE Transactions on automatic control*, 2016, 61(9) : 2733–2738.
- [14] ZHANG K Z. Synthesis for observability of logical control networks[J]. *Automatica*, 2022, 144: 110481.
- [15] CHENG D Z, QI H S, ZHAO Y. An introduction to semi-tensor product of matrices and its applications[M]. Singapore: World Scientific, 2012.
- [16] CHENG D, QI H, LI Z. Analysis and control of Boolean networks: a semi-tensor product approach[J]. *Acta automatica sinica*, 2011, 37(5) : 529–540.

责任编辑: 周建军

(上接第 21 页)

- 2020, 98: 150–161.
- [19] JIANG L, LI S, WANG N, et al. Preparation of dextran casein phosphopeptide conjugates, evaluation of its calcium binding capacity and digestion in vitro[J]. *Food chemistry*, 2021, 352: 129332.
- [20] NARA M, MORII H, TANOKURA M. Coordination to divalent cations by calcium-binding proteins studied by FTIR spectroscopy[J]. *BBA-Biomembranes*, 2013, 1828(10) : 2319–2327.
- [21] 丁媛媛, 王莉, 张新霞, 等. 麦胚多肽-钙螯合物制备工艺优化及其结构表征[J]. *食品科学*, 2017, 38(10) : 215–221.

责任编辑: 郎婧

(上接第 74 页)

- [EB/OL]. [2022-06-01]. <https://arxiv.org/abs/2110.11154v1>.
- [11] KANG S K, HWANG J, LEE D, et al. Semi-supervised learning for cross-domain recommendation to cold-start users[C]//The 28th ACM International Conference on Information and Knowledge Management. New York: Association for Computing Machinery, 2019: 1563–1572.
- [12] KOREN Y, BELL R, VOLINSKY C. Matrix factorization techniques for recommender systems[J]. *Computer*, 2009, 42(8) : 30–37.
- [13] RENDLE S. Factorization machines[C]//IEEE. 2010 IEEE International Conference on Data Mining. New York: IEEE, 2010: 5694074.
- [14] HUANG P S, HE X, GAO J, et al. Learning deep structured semantic models for web search using clickthrough data[C]// ACM. 22nd ACM International Conference on Information and Knowledge Management. New York: Association for Computing Machinery, 2013: 2333–2338.

责任编辑: 郎婧