



DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20210120

数字出版日期: 2021-11-12; 数字出版网址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/12.1355.N.20211110.1654.002.html>

## 求解凸约束非线性方程组的无导数 DY 投影算法

李丹丹<sup>1</sup>, 王松华<sup>2</sup>

(1. 广州华商学院应用数学系, 广州 511300; 2. 百色学院数学与统计学院, 百色 533000)

**摘要:** 在高效线搜索方法产生的步长和投影技术产生的新迭代点的基础上, 提出了一类求解带凸约束非线性方程组问题的无导数修正 DY 共轭梯度投影算法. 新算法继承了共轭梯度法和投影技术的良好性质, 适合于求解大规模优化问题. 在一定的假设下, 得到新算法的全局收敛性结论. 数值结果表明新算法是有效且稳定的, 与其他算法相比更具有竞争性.

**关键词:** 非线性方程组; 无导数; 凸约束; 全局收敛性

中图分类号: O224 文献标志码: A 文章编号: 1672-6510(2022)01-0076-05

## Derivative-Free DY Projection Algorithm for Large-Scale Nonlinear Equations with Convex Constraints

LI Dandan<sup>1</sup>, WANG Songhua<sup>2</sup>

(1. Department of Applied Mathematics, Guangzhou Huashang College, Guangzhou 511300, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Baise University, Baise 533000, China)

**Abstract:** Based on the fact that a steplength and a new iterative point are determined by the efficient line search approach and the projection technique respectively, in this article we propose a modified derivative-free DY conjugate gradient projection algorithm for restricted nonlinear equations. This novel algorithm inherits the good properties of the conjugate gradient method and projection technique, which is suitable to address large-scale optimization issues. It also achieves global convergence under some reasonable assumptions. Moreover, numerical results demonstrate that it is both promising and stable, as well as more competitive than other algorithms.

**Key words:** nonlinear equations; derivative-free; convex constraint; global convergence

凸约束非线性方程组广泛应用于压缩感知中的信号恢复、图像处理、等离子体物理学、非线性光学等问题<sup>[1-4]</sup>, 因此, 研究求解带有凸约束非线性方程组问题的高效数值算法具有重要的理论价值与实际应用意义. 于是本文考虑如下带凸约束的非线性方程组问题:

$$\varphi(z) = 0, z \in A \quad (1)$$

其中,  $\varphi: A \rightarrow \mathbf{R}^n$  是连续非线性函数, 且  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  是一个非空闭凸集.

目前在求解问题(1)的众多数值方法中, 梯度类方法<sup>[5-6]</sup>表现较好, 考虑到共轭梯度法的低存储需求

与迭代框架简单等优点, 学者们试图将共轭梯度法与投影技术结合应用于求解问题(1), 如文献[7-9]. 文献[10]研究了共轭梯度法的进展, 提到经典的共轭梯度法(如 HS 算法、LS 算法、DY 算法等)不能同时满足收敛效果好、数值效果佳的事实, 并讨论了三项共轭梯度方法的构造形式. 文献[11]在经典 HS 方法的基础上研究一种求解问题(1)的修正三项共轭梯度投影算法. 文献[12]对经典 LS 方法进行修正, 提出了一种新的三项共轭梯度投影算法来求解凸约束非线性单调方程组问题. 文献[13]建立了一个高效求解无约束优化问题的新型三项共轭梯度法, 该方法的搜索

收稿日期: 2021-05-21; 修回日期: 2021-09-08

基金项目: 广西自然科学基金资助项目(2020GXNSFAA159069); 广东财经大学华商学院校内项目(2021HSDS32)

作者简介: 李丹丹(1991—), 女, 安徽阜阳人, 助教; 通信作者: 王松华, 副教授, 523429892@qq.com

方向在不依赖于任意线搜索的情况下自动满足充分下降性且数值效果显著. 文献[14]将其推广到带简单凸约束的非线性方程组问题. 考虑到经典 DY 算法具有较强的收敛性, 但数值效果欠佳的情况, 受文献[14]构造思想的启发, 对 DY 算法的搜索方向进行修正, 提出了一种无导数修正 DY 三项共轭梯度投影算法用于求解凸约束非线性方程组问题.

## 1 算法描述

文献[10]总结的三项共轭梯度方向构造形式为

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\boldsymbol{\varphi}_k & k=0 \\ -\boldsymbol{\varphi}_k + \beta_k \mathbf{d}_{k-1} - \theta_k \mathbf{p}_k & k \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

式中: 参数  $\beta_k$  为共轭参数; 为了方便描述,  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k)$  记为  $\boldsymbol{\varphi}_k$ ;  $\mathbf{p}_k$  可定义为  $\boldsymbol{\varphi}_k$ 、 $\mathbf{d}_{k-1}$  或  $\boldsymbol{\gamma}_{k-1} = \boldsymbol{\varphi}_k - \boldsymbol{\varphi}_{k-1}$  等任一形式.

一般共轭梯度法的迭代式为  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ , 其中  $\alpha_k$  为确定的步长,  $\mathbf{d}_k$  为搜索方向.

文献[14]设计了一个三项共轭梯度方向, 其定义为

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\boldsymbol{\varphi}_k & k=0 \\ -\sigma_1 \boldsymbol{\varphi}_k + \beta_k^{\text{LLY}} \mathbf{d}_{k-1} - \sigma_2 c_k \mathbf{w}_k & k \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ , 符号  $\|\cdot\|$  代表 Euclidean 范数,

$$\beta_k^{\text{LLY}} = \left( \langle \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle - 2c_k \|\mathbf{w}_{k-1}\|^2 \right) / \langle \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1} \rangle,$$

$$c_k = \langle \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{d}_{k-1} \rangle / \langle \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{d}_{k-1} \rangle, \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{y}_{k-1} + \lambda_k \mathbf{d}_{k-1},$$

$$\lambda_k = 1 + \max \left\{ 0, \langle \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{d}_{k-1} \rangle / \|\mathbf{d}_{k-1}\|^2 \right\}, \mathbf{y}_{k-1} = \boldsymbol{\varphi}_k - \boldsymbol{\varphi}_{k-1}.$$

仔细观察可发现共轭参数  $\beta_k^{\text{LLY}}$  的第一项为  $\langle \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle / \langle \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1} \rangle$ , 这是经典共轭参数  $\beta_k^{\text{HS}}$  的变体形式, 即:  $\langle \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{y}_{k-1} \rangle / \langle \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1} \rangle$ , 它们的主要区别在于  $\beta_k^{\text{LLY}}$  采用  $\langle \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1} \rangle$  作为分母, 如果  $\mathbf{x}_k$  不是最优解, 这就保证参数  $\beta_k^{\text{LLY}}$  的定义是良好的.

基于以上的分析, 本文对经典共轭参数  $\beta_k^{\text{DY}} = \|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2 / \langle \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1} \rangle$  进行修正, 在式(2)和式(3)形式的基础上, 构建一个新的搜索方向公式:

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\boldsymbol{\varphi}_k & k=0 \\ -\sigma_1 \boldsymbol{\varphi}_k + \beta_k^{\text{MLLY}} \mathbf{d}_{k-1} - \sigma_2 c_k \boldsymbol{\varphi}_k & k \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\beta_k^{\text{MLLY}} = (1 - 2b_k) \|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2 / \langle \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1} \rangle,$$

$$b_k = \|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2 \|\mathbf{d}_{k-1}\|^2 / (\langle \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1} \rangle \langle \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{d}_{k-1} \rangle).$$

最后, 引入投影算子, 其定义为从集合  $\mathbf{R}^n$  到非空闭凸集  $A$  的映射, 即

$$P_A(\mathbf{z}) = \arg \min \{ \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\| \mid \hat{\mathbf{z}} \in A \}$$

该算子具有以下良好性质:

$$\langle P_A(\mathbf{z}) - \mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}} - P_A(\mathbf{z}) \rangle \geq 0, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n, \hat{\mathbf{z}} \in A,$$

$$\|P_\Omega(\mathbf{z}) - P_\Omega(\hat{\mathbf{z}})\| \leq \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|, \forall \mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{R}^n.$$

综上所述, 下面给出求解带凸约束的非线性方程组算法描述.

算法 MLLY 的步骤:

(1) 给出参数  $\beta, \sigma > 0, \rho \in (0, 1), \sigma_1, \sigma_2 > 0, \varepsilon \geq 0$ , 初始点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 令  $k = 0$ ;

(2) 计算  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k)$ , 若  $\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon$ , 则算法停止;

(3) 搜索方向  $\mathbf{d}_k$  是由式(4)计算而得;

(4) 令  $\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ , 其中步长

$\alpha_k = \max \{ \beta \rho^i \mid i = 0, 1, 2, \dots \}$  满足如下不等式:

$$-\langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k), \mathbf{d}_k \rangle \geq \sigma \alpha_k \|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k)\| \|\mathbf{d}_k\|^2 \quad (5)$$

(5) 计算  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_k)$ , 若  $\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_k)\| \leq \varepsilon$ , 则算法停止, 否则通过如下方法计算下一个迭代点  $\mathbf{z}_{k+1}$ , 即

$$\mathbf{z}_{k+1} = P_A(\mathbf{z}_k - \kappa_k \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_k)) \quad (6)$$

其中  $\kappa_k = \langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_k), \mathbf{z}_k - \mathbf{v}_k \rangle / \|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{v}_k)\|^2$ ;

(6) 令  $k := k + 1$ , 转步骤(2).

## 2 收敛性分析

本节先分析算法 MLLY 产生的搜索方向拥有充分下降性, 再证明由式(5)产生步长的存在性, 最后讨论算法 MLLY 具有全局收敛的性质. 下面给出合理的假设.

假设 S

(S1) 映射  $\boldsymbol{\varphi}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是单调连续的, 即

$$\langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{z}}), \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \rangle \geq 0, \mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{R}^n;$$

(S2) 问题(1)的解集非空;

(S3) 映射  $\boldsymbol{\varphi}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是 Lipschitz 连续的, 即存在常数  $\zeta > 0$ , 有

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{z}})\| \leq \zeta \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|, \forall \mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{R}^n \quad (7)$$

引理 1 假定序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  和  $\{\mathbf{d}_k\}$  是由算法 MLLY 产生的, 若  $\sigma_1 - (1 + \sigma_2)^2 / 8\sigma_1 > 0$  和  $0 < \sigma_1 \leq 1$ , 则存在正常数  $\chi$  使得如下不等式成立:

$$\boldsymbol{\varphi}_k^\top \mathbf{d}_k \leq -\chi \|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2 \quad (8)$$

证明: 当  $k = 0$  时, 令  $\chi = 1, \langle \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{d}_k \rangle = -\|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2$ ,

那么式(8)显然成立. 当  $k \geq 1$  时, 令  $A = \frac{1 + \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1}}$ .  $\langle d_{k-1}, w_{k-1} \rangle \varphi_k$  和  $B = 2\sqrt{\sigma_1} \|\varphi_k\|^2 d_{k-1}$ , 利用不等式  $\langle A, B \rangle \leq \frac{1}{2}(\|A\|^2 + \|B\|^2)$  得

$$(1 + \sigma_2) \langle d_{k-1}, w_{k-1} \rangle \langle \varphi_k, d_{k-1} \rangle \|\varphi_k\|^2 \leq \frac{(1 + \sigma_2)^2}{8\sigma_1} \langle d_{k-1}, w_{k-1} \rangle^2 \|\varphi_k\|^2 + 2\sigma_1 \|\varphi_k\|^4 \|d_{k-1}\|^2 \quad (9)$$

对式(4)两边左乘  $\varphi_k^T$ , 结合式(9)得

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k, d_k \rangle &\leq -\sigma_1 \|\varphi_k\|^2 + (1 + \sigma_2) \frac{\|\varphi_k\|^2 \langle \varphi_k, d_{k-1} \rangle}{\langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle} - \\ &\frac{2\sigma_1 \|\varphi_k\|^4 \|d_{k-1}\|^2}{\langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle^2} = -\sigma_1 \|\varphi_k\|^2 + \\ &(1 + \sigma_2) \frac{\|\varphi_k\|^2 \langle \varphi_k, d_{k-1} \rangle \langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle}{\langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle^2} - \\ &\frac{2\sigma_1 \|\varphi_k\|^4 \|d_{k-1}\|^2}{\langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle^2} \leq -\sigma_1 \|\varphi_k\|^2 + \\ &\frac{(1 + \sigma_2)^2}{8\sigma_1} \times \frac{\langle d_{k-1}, w_{k-1} \rangle^2 \|\varphi_k\|^2}{\langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle^2} + \\ &\frac{2\sigma_1 \|\varphi_k\|^4 \|d_{k-1}\|^2}{\langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle^2} - \frac{2\sigma_1 \|\varphi_k\|^4 \|d_{k-1}\|^2}{\langle w_{k-1}, d_{k-1} \rangle^2} = \\ &-\left( \sigma_1 - \frac{(1 + \sigma_2)^2}{8\sigma_1} \right) \|\varphi_k\|^2 \end{aligned}$$

于是令  $\chi = \sigma_1 - (1 + \sigma_2)^2 / 8\sigma_1$ , 那么式(8)成立.

**引理 2** 若假设 S 条件成立, 对于  $\forall k$ , 存在步长  $\alpha_k$  满足式(5).

**证明:** 类似于文献[15]中的引理 2.2 可以证明结论成立.

**引理 3** 若假设 S 条件成立, 算法 MLLY 产生序列  $\{z_k\}$  和  $\{v_k\}$ , 那么对于问题(1)的最优解  $z^*$ , 有

$$\|z_{k+1} - z^*\|^2 \leq \|z_k - z^*\|^2 - \eta^2 \|z_k - v_k\|^4$$

进一步有序列  $\{z_k\}$  是有界的且

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|z_k - v_k\|^4 < +\infty$$

**证明:** 类似于文献[9]中的引理 2 可以证明此结论成立.

**定理 1** 若假设 S 条件成立, 算法 MLLY 产生的序列  $\{z_k\}$ ,  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{d_k\}$ ,  $\{v_k\}$  使得  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\| = 0$  成立.

**证明:** 由引理 3 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|d_k\| = 0 \quad (10)$$

假设  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|d_k\| = 0$  成立, 由式(8)可以推断出  $\|d_k\| \geq \chi \|\varphi_k\|$ , 于是结论成立. 假设  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|d_k\| \neq 0$ , 那么若  $\alpha_k \neq \beta$ , 则步长  $\alpha_k \rho^{-1}$  不满足式(5), 即

$$-\varphi(z_k + \alpha_k \rho^{-1} d_k)^T d_k < \sigma \alpha_k \rho^{-1} \|\varphi(z_k + \alpha_k \rho^{-1} d_k)\| \|d_k\|^2$$

上式联合式(7)、式(8)和 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} \chi \|\varphi_k\|^2 &\leq -\varphi_k^T d_k = (\varphi(z_k + \alpha_k \rho^{-1} d_k) - \varphi_k)^T d_k - \\ &\varphi(z_k + \alpha_k \rho^{-1} d_k)^T d_k \leq \\ &\alpha_k \rho^{-1} \|d_k\|^2 (\zeta + \sigma \|\varphi(z_k + \alpha_k \rho^{-1} d_k)\|) \end{aligned}$$

整理上式得

$$\alpha_k \|d_k\| \geq \frac{\chi \|\varphi_k\|^2}{\rho^{-1} \|d_k\| (\zeta + \sigma \|\varphi(z_k + \alpha_k \rho^{-1} d_k)\|)}$$

上式两边对  $k$  取极限, 由式(10)推得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\chi \|\varphi_k\|^2}{\rho^{-1} \|d_k\| (\zeta + \sigma \|\varphi(z_k + \alpha_k \rho^{-1} d_k)\|)} = 0$$

故结论成立. 证毕.

### 3 数值实验

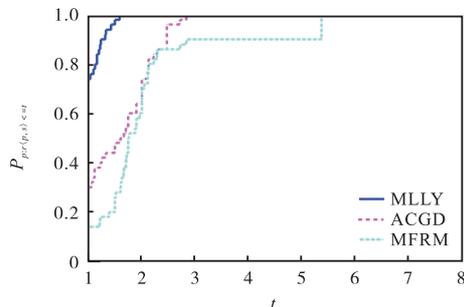
为了检测算法 MLLY 的性能表现, 本节将其与算法 ACGD<sup>[16]</sup>和算法 MFRM<sup>[17]</sup>进行比较. 算法 ACGD 和算法 MFRM 保持原有的参数设置, 算法 MLLY 的参数设置为  $\beta=1$ ,  $\rho=0.55$ ,  $\sigma=0.001$ ,  $\sigma_1=0.7$ ,  $\sigma_2=0.3$ ,  $\varepsilon=10^{-5}$ . 所有算法都采用 MATLAB 2014a 软件编写并运行, 运行环境为 Windows 10 (64 bite), RAM 8 GB, CPU 3.60 GHz. 测试问题共 10 个, 分别来自文献[1, 17-20], 对每个测试问题选取不同的维数且设置维数为 [1 000 5 000 10 000 50 000 100 000], 迭代次数上限为 800.

计算出 3 种算法在求解过程中的 3 个指标(总迭代次数、函数计算总次数、CPU 运行总时间)的数据, 采用曲线计算方法<sup>[21]</sup>绘制性能图, 进而更直观地分析对比 3 种算法的性能效果, 结果如图 1 所示. 图 1 从 3 个角度(迭代次数、函数计算次数和 CPU 运行时间)进行评价, 曲线越靠上, 表明算法越稳定与有效.

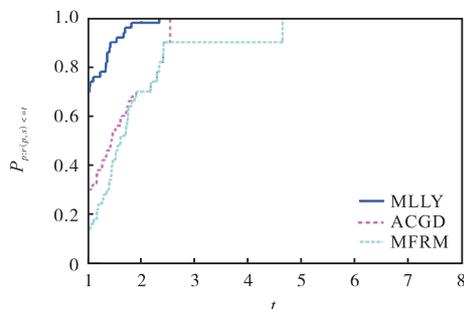
图 1 中横坐标的  $t$  指的是给定的数值比率, 纵坐标的计算公式为

$$P_{pr(p,s) < t} = \frac{1}{|P|} \left\{ p \in P : \log_2 \left( \frac{r_{p,s}}{\min\{r_{p,s} : s \in V\}} \right) \leq t \right\} \quad (11)$$

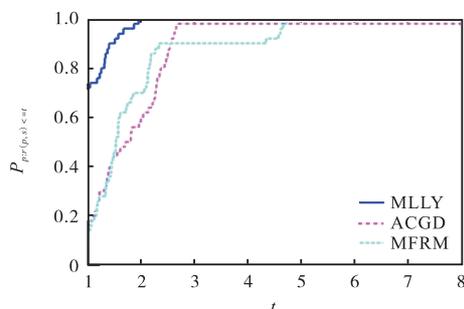
式中:  $P$  为测试集,  $|P|$  为测试集的问题个数,  $V$  为算法集合,  $r_{p,s}$  为某种指标(运行时间、迭代次数和函数计算次数).



(a) 总迭代次数



(b) 函数计算总次数



(c) 总运行时间

图1 不同算法的比较

Fig. 1 Comparison profile of different algorithms

从图1可看出,算法MLLY的曲线在图中均位于其他两个算法之上,这表明在3个指标上算法MLLY均优于算法ACGD和算法MFRM,具有较好的鲁棒性.

## 4 结语

在修正经典DY共轭参数及文献[14]搜索方向的基础上,本文提出了求解一类带凸约束大规模非线性方程组问题的无导数修正DY共轭梯度投影算法.新方法拥有充分下降性和全局收敛的良好性质.数值

结果表现了新算法的有效性,更适合求解大规模非线性方程组问题.同时,也可进一步研究新算法在处理信号恢复与图像处理等问题上的实用性.

## 参考文献:

- [1] IBRAHIM A H, KUMAM P, ABUBAKAR A B, et al. A hybrid conjugate gradient algorithm for constrained monotone equations with application in compressive sensing[J]. Heliyon, 2020, 6(3): e03466.
- [2] ABUBAKAR A B, MUANGCHOO K, IBRAHIM A H, et al. A new three-term Hestenes-Stiefel type method for nonlinear monotone operator equations and image restoration[J]. IEEE Access, 2021, 9: 18262–18277.
- [3] JIA T T, GAO Y T, DENG G F, et al. Quintic time-dependent-coefficient derivative nonlinear Schrödinger equation in hydrodynamics or fiber optics: bilinear forms and dark/anti-dark/gray solitons[J]. Nonlinear dynamics, 2019, 98(1): 269–282.
- [4] ZHANG C R, TIAN B, WU X Y, et al. Rogue waves and solitons of the coherently-coupled nonlinear Schrödinger equations with the positive coherent coupling[J]. Physica scripta, 2018, 93(9): 095202.
- [5] 胡亚萍, 王玉杰, 刘丽英. 求解非光滑问题的修正HS共轭梯度法[J]. 天津科技大学学报, 2021, 36(3): 77–80.
- [6] 李丹丹, 王松华. 基于凸组合技术的加速FR型共轭梯度算法[J]. 广西科学, 2021, 28(2): 160–166.
- [7] ZHENG L, YANG L, LIANG Y. A modified spectral gradient projection method for solving non-linear monotone equations with convex constraints and its application[J]. IEEE Access, 2020, 8: 92677–92686.
- [8] 李丹丹, 王松华. 解大规模非线性方程组的一种三项型投影算法[J]. 海南大学学报(自然科学版), 2021, 39(2): 125–131.
- [9] 李丹丹, 李远飞. 一种新型三项共轭梯度法求解大规模方程组[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2021, 22(2): 149–155.
- [10] 简金宝, 江羨珍, 尹江华. 非线性共轭梯度法研究进展[J]. 玉林师范学院学报, 2016, 37(2): 3–10.
- [11] 李丹丹, 李远飞. 有界约束非线性方程组的修正三项HS投影算法及应用[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2021, 41(4): 41–46.
- [12] GAO P, HE C. An efficient three-term conjugate gradient method for nonlinear monotone equations with convex constraints[J]. Calcolo, 2018, 55(4): 1–17.

- [ 13 ] AL-BAALI M, NARUSHIMA Y, YABE H. A family of three-term conjugate gradient methods with sufficient descent property for unconstrained optimization[J]. Computational optimization and applications, 2015, 60(1) : 89–110.
- [ 14 ] ZHENG L, YANG L, LIANG Y. A conjugate gradient projection method for solving equations with convex constraints[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2020, 375 : 112781.
- [ 15 ] LIU J, FENG Y. A derivative-free iterative method for nonlinear monotone equations with convex constraints[J]. Numerical algorithms, 2019, 82(1) : 245–262.
- [ 16 ] DING Y, XIAO Y, LI J. A class of conjugate gradient methods for convex constrained monotone equations[J]. Optimization, 2017, 66(12) : 2309–2328.
- [ 17 ] ABUBAKAR A B, KUMAM P, MOHAMMAD H, et al. A modified Fletcher-Reeves conjugate gradient method for monotone nonlinear equations with some applications[J]. Mathematics, 2019, 7(8) : 745.
- [ 18 ] MOHAMMAD H, ABUBAKAR A B. A descent derivative-free algorithm for nonlinear monotone equations with convex constraints[J]. RAIRO-Operations research, 2020, 54(2) : 489–505.
- [ 19 ] KOORAPETSE M S, KAELO P. Globally convergent three-term conjugate gradient projection methods for solving nonlinear monotone equations[J]. Arabian journal of mathematics, 2018, 7(4) : 289–301.
- [ 20 ] IBRAHIM A H, KUMAM P, ABUBAKAR A B, et al. Least-square-based three-term conjugate gradient projection method for  $\ell_1$ -norm problems with application to compressed sensing[J]. Mathematics, 2020, 8(4) : 602.
- [ 21 ] DOLAN E D, MORÉ J J. Benchmarking optimization software with performance profiles[J]. Mathematical programming, 2002, 91(2) : 201–213.

责任编辑:周建军

(上接第45页)

- [ 7 ] CHEN Z Y, DUAN Y P, ZHANG Y Q. Automated vehicle path planning and trajectory tracking control based on unscented Kalman filter vehicle state observer[R/OL]. (2021–04–06) [2021–05–08]. <https://www.sae.org/publications/technical-papers/content/2021-01-0337>.
- [ 8 ] HOFFMANN G M, TOMLIN C J, MONTEMERLO M, et al. Autonomous automobile trajectory tracking for off-road driving: controller design, experimental validation and racing[C]//Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York: IEEE, 2007: 2296–2301.
- [ 9 ] 彭之川, 朱田, 易慧斌. 基于改进的 Pure Pursuit 智能客车轨迹跟踪算法研究[J]. 客车技术与研究, 2019, 41(5) : 21–24.
- [ 10 ] WALLACE R S, STENTZ A, THORPE C E, et al. First results in robot road-following[C]//Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Los Angeles: IJCAI, 1985: 1089–1095.
- [ 11 ] HUANG G, YUAN X, SHI K, et al. Adaptivity-enhanced path tracking system for autonomous vehicles at high speeds[J]. IEEE Transactions on intelligent vehicles, 2020, 5(4) : 626–634.
- [ 12 ] YAO Q, TIAN Y, WANG Q, et al. Control strategies on path tracking for autonomous vehicle: state of the art and future challenges[J]. IEEE Access, 2020, 8 : 161211–161222.
- [ 13 ] WANG P, WANG Q, WAN M, et al. A fractional derivative-based lateral preview driver model for autonomous automobile path tracking[J]. Mathematical problems in engineering, 2018, 2018 : 7320413.
- [ 14 ] TAHERI S, RAKHEJA S, HONG H. Characterization of driver steering control of articulated freight vehicles based on a two-stage preview strategy[J]. SAE International journal of commercial vehicles, 2013, 6 : 381–393.
- [ 15 ] 高振海, 管欣, 郭孔辉. 预瞄跟随理论和驾驶员模型在汽车智能驾驶研究中的应用[J]. 交通运输工程学报, 2002(2) : 63–66.

责任编辑:周建军