



DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20200214

一种非线性金融系统的力学分析及基于有限时间 LaSalle 不变集的混沌控制

陈嘉琦¹, 仓诗建², 薛薇¹

(1. 天津科技大学电子信息与自动化学院, 天津 300222; 2. 天津科技大学艺术设计学院, 天津 300222)

摘要: 从力学角度, 将一种三维非线性金融系统分解成 Kolmogorov 系统的保守力矩、耗散力矩以及外力矩, 并分析不同力矩作用于该金融系统时的动态特性, 剖析该金融系统产生混沌行为的原因, 并结合金融市场解释其物理意义. 为控制该金融系统的混沌行为, 基于有限时间的 LaSalle 不变集理论, 设计一种自适应控制器. 理论分析和数值仿真表明, 此控制器作用于系统时会在有限时间内有效地将混沌的金融系统控制到稳定状态.

关键词: 金融系统; 力学分析; 有限时间理论; LaSalle 不变集定理; 混沌控制

中图分类号: O194 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6510(2021)04-0067-06

Mechanical Analysis of a Nonlinear Financial System and Chaos Control Based on Finite Time LaSalle Invariant Set Theory

CHEN Jiaqi¹, CANG Shijian², XUE Wei¹

(1. College of Electronic Information and Automation, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China;

2. College of Art and Design, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

Abstract: The mechanical analysis and chaos control of a three-dimensional (3D) nonlinear financial system are investigated in this paper. Based on the formalism of the Kolmogorov system, the financial system can be divided into three parts: conservative torque, dissipative torque, and exterior torque. The dynamical behaviors of different torques introduced into the 3D financial system are discussed numerically and the mechanism of the occurrence of chaos is uncovered. Then, its physical meaning of the interaction effect of different state variables is explained. To control the chaotic dynamics of the 3D system, an adaptive control scheme is designed to suppress chaos based on the finite time LaSalle invariant set theory. Theoretical analysis and numerical results show that the proposed control scheme is effective for controlling the 3D chaotic financial system to a stable state.

Key words: financial system; mechanical analysis; finite time theory; LaSalle invariant set theorem; chaos control

金融系统是关于资金集中与分配的一个体系, 是国家经济运行的核心部分, 维护好金融系统的稳定运行和对金融系统紊乱进行有效地预测和控制对国家经济宏观调控非常重要, 同样也是众多学者研究的热点. 金融系统中投资需求与利率等因素^[1]之间的相互影响, 导致系统状态变化呈现复杂的动态特性. 原本稳定的金融市场可能因某一个或几个因素的微小变

化而出现停滞、混乱情况, 甚至出现金融危机^[2], 这种现象是金融系统非线性动态特性的典型反应.

揭示金融系统的发展规律, 应当深入研究系统内部复杂结构. 已有很多学者提出并研究了一些非线性金融模型. Kopel^[3]研究了古诺双寡头模型的复杂动力学行为, Wu 等^[4]设计了关于古诺双寡头模型的控制方法, Lorenz 等^[5]分析了 Goodwins 非线性加速

收稿日期: 2020-12-13; 修回日期: 2021-02-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61873186)

作者简介: 陈嘉琦(1994—), 男, 天津人, 硕士研究生; 通信作者: 仓诗建, 副教授, csj98231@tust.edu.cn

模型的吸引子和吸引盆等. 其中, 研究较多的金融模型是一种非线性金融模型^[6-7], 数学表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (1)$$

式中: 参数 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 分别代表储蓄量、单位投资成本、商品需求弹性; 状态变量 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 分别代表利率、投资需求、价格指数. 由系统(1)可知, 投资需求与储蓄量的大小关系, 以及物价的结构调整都影响着 x 的变化, y 的变化与利率和单位投资成本成反比, 与投资率成正比; 而 z 的变化既受通货膨胀率的影响, 又受商品市场供求矛盾的调控.

针对系统(1)及其衍生的金融混沌系统, 研究人员研究了系统控制的方法和分岔^[7-13], 以及将系统(1)扩至 4D 超混沌系统并研究系统中存在的复杂特性^[14-16]. Son 等^[8]考虑了时滞反馈项分别对不同变量的影响和对全部变量的影响. Gao 等^[12]讨论了时滞反馈系统 Hopf 分岔的条件. Zheng 等^[14]利用一个异结构的 4D 超混沌系统对 4D 超混沌金融系统进行了投影同步研究. Zhang 等^[15]分析了 4D 超混沌金融系统的有界性. 但是, 大部分研究都只针对系统本身作理论分析和仿真验证, 却很少结合实际情况.

本文将非线性金融系统分解成 Kolmogorov 系统形式, 根据不同的力矩组合, 从力学角度对该系统进行能量分析, 并结合金融市场分析解释系统中状态变量和参数间的相互影响. 为抑制金融系统的混沌行为, 将有限时间理论和 LaSalle 不变集定理进行结合, 提出一种新的混沌控制方法. 在理论分析的基础上借助数值仿真, 将混沌状态的金融系统有效控制到稳定状态, 从而达到对金融系统混沌行为的有效控制.

1 系统平衡点分析及混沌行为

当参数 (a, b, c) 满足 $c - b - abc \leq 0$ 时, 系统(1)存在单一平衡点 $S_1 = (0, 1/b, 0)$; 而当 $c - b - abc > 0$ 时, 系统(1)则存在 3 个不同的平衡点 $S_1 = (0, 1/b, 0)$, $S_{2,3} = (\pm\sqrt{(c - b - abc)/c}, (1 + ac)/c, \mp(1/c)\sqrt{(c - b - abc)/c})$. 当参数 (a, b, c) 取不同值时, 系统(1)会呈现不同的运动状态, 例如周期运动、混沌等. 特别当系统(1)选择初始条件 $I_0 = (3, 1, 5)$, 参数集 $(a, b, c) = (1, 0.2, 1.1)$ 时, 可得到系统的 3 个 Lyapunov 指数值为 $(LE_1, LE_2, LE_3) = (0.067, 0, -0.628)$. 由于 $LE_1 > 0$, 这表明系统(1)处于混沌状态, 相轨迹如图 1 所示.

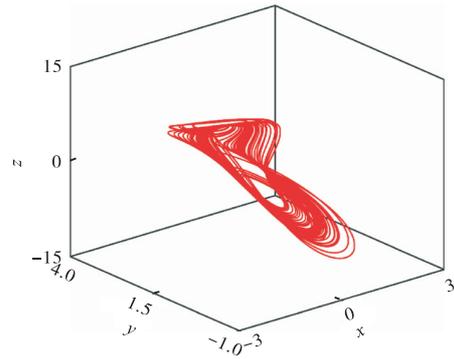


图 1 参数集 $(a, b, c) = (1, 0.2, 1.1)$ 时系统(1)的相图
Fig. 1 Phase diagram of system(1) parameter set $(a, b, c) = (1, 0.2, 1.1)$

2 系统力学分析

系统(1)的混沌行为已得到深入研究, 作为具有实际意义的非线性系统, 每个状态变量和参数都有其对应的实际物理意义. 分析它们的变化对系统本身混沌现象的影响是研究整个系统混沌现象的重要基础. 将系统(1)转换成 Kolmogorov 型系统后, 其状态变量和参数仍具有各自对应的原始物理意义.

通常 Kolmogorov 型系统形式为

$$\dot{X} = \{X, H\} - \Lambda X + f \quad (2)$$

式中: $X = \{x, y, z\}^T$ 表示状态变量, $\{, \}$ 表示李代数结构, 力矩 $\{X, H\}$ 表示保守力矩. 正对角矩阵 ΛX 表示耗散力矩, f 表示外力矩.

将系统改写成 Kolmogorov 系统的形式为

$$\dot{X} = \{X, H\} - \Lambda X + f = \begin{pmatrix} 0 & x & 1 \\ -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中: $X = \{x, y, z\}^T$, $\Lambda = \text{diag}\{a, b, c\}$, $f = \{0, 1, 0\}^T$. 保守项 $\{X, H\}$ 包括惯性力矩 K 和内力矩 U , 即 $H = K + U$. 根据式(3)不难得到系统的 Hamilton 能量函数为

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad (4)$$

通过研究不同力矩组合对系统动力学特性的影响, 进而探索系统(1)产生混沌现象的机制.

2.1 系统仅包含保守力矩

当系统(1)仅包含惯性力矩(动能)和内力矩(势能)时, 有 $\dot{X} = \{X, K\} + \{X, U\} = \{X, H\}$, 对应的方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + z \\ \dot{y} = -x^2 \\ \dot{z} = -x \end{cases} \quad (5)$$

此时 Hamilton 能量的导数 $\dot{H} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$, 不存在耗散项和外部激励, 因而系统能量守恒. 对于给定的初始条件 $I_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 系统的初始 Hamilton 能量为 $H_0 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)/2$, 由于 $\dot{y} \leq 0$, 所以状态变量 y 最终稳定在 $y = -\sqrt{2H_0}$, 而状态变量 $x, z \rightarrow 0$. 于是, 可得到该系统的散度 $\nabla \cdot V = y = -\sqrt{2H_0} < 0$, 因此系统 (5) 不是体积保守系统. 状态变量与 Hamilton 能量的变化规律如图 2 所示. 这种情况下, 利率 x 和价格指数 z 均为 0. 零利率一般会出现在经济低迷时期, 可以通过降低利率的方式在一定程度上减少存款促进贷款, 提高市场中的资金流动来带动经济, 且在一定时期内物价未发生变化, 意味着该状态下经济发展缓慢或处于停顿状态.

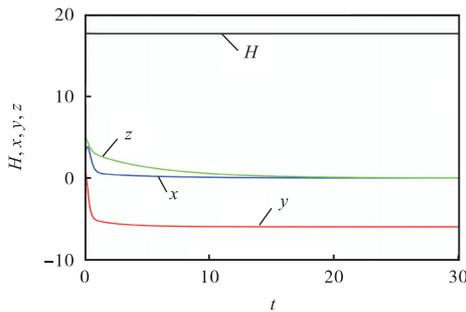


图2 初始值为 I_0 时, 系统 (5) 状态变量 x, y, z 及 Hamilton 能量 H 的时序图

Fig. 2 Time sequence diagram of the state variables x, y, z and Hamilton energy H of the system (5) when the initial value is I_0

2.2 系统包含保守力矩和耗散力矩

当系统 (1) 包含保守力矩和耗散力矩时, 即 $\dot{X} = \{X, H\} - \Lambda X$, 系统 (1) 的方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + xy + z \\ \dot{y} = -by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (6)$$

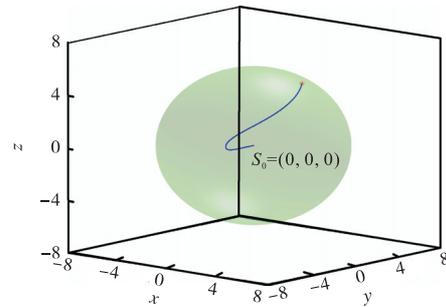
选取系统的 Hamilton 能量函数 H 作为 Lyapunov 函数, 那么关于时间的导数为

$$\dot{H} = -ax^2 - by^2 - cz^2 \leq 0 \quad (7)$$

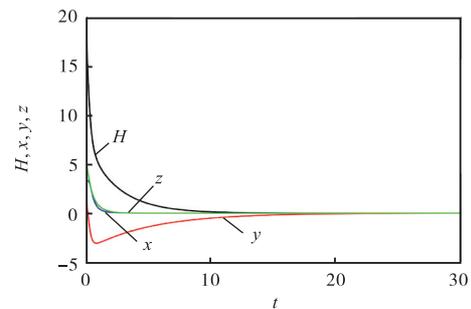
根据 Lyapunov 稳定性理论可知, 系统 (6) 是稳定的, 而且所有状态变量渐近收敛到 0. 另一方面系统 (6) 的散度为

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - b - c + y \quad (8)$$

由于参数 (a, b, c) 均为正实数, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 由式 (8) 可知, 系统 (6) 相空间的体积趋近于 0. 系统 (6) 的利率 x , 投资需求 y 和价格指数 z 都趋近 0. 系统 (6) 的相轨迹、状态变量和 Hamilton 能量变化规律如图 3 所示. 此时, 金融系统陷入完全停滞僵化的状态, 经济市场缺少活力.



(a) 相轨迹



(b) 状态变量 x, y, z 和 Hamilton 能量的时序图

图3 系统 (6) 的动态特性

Fig. 3 Dynamic characteristics of the system (6)

2.3 系统包含保守力矩和外力矩

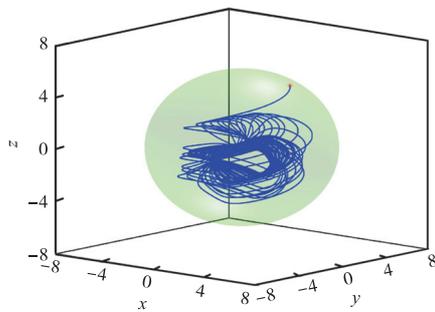
当系统包含保守力矩和外力矩, 即 $\dot{X} = \{X, H\} + f$, 系统 (1) 对应的方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + z \\ \dot{y} = 1 - x^2 \\ \dot{z} = -x \end{cases} \quad (9)$$

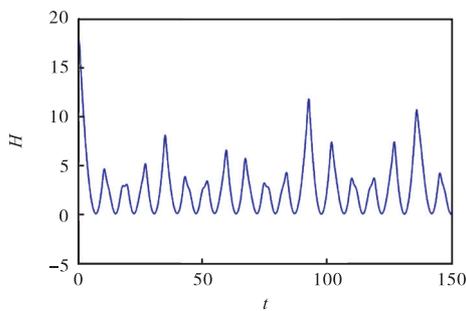
此时, 外力矩 f 中的投资率 1 相当于一个外部强激励, f 的存在极大地提升了经济市场的活力, 但状态变量的运动变得没有规律, 系统进入混沌状态. 其 Hamilton 能量变化 $\dot{H} = y$, 投资需求 y 由资本边际效率 (预期增加一个单位投资可得到的利润率) 和利率的对比关系决定. 能量 $H = y^2/2$ 的吸收和释放随投资需求 y 的不规则运动而交错增减, 是有限区域内的混沌. 系统的相轨迹和能量变化规律如图 4 所示.

金融系统受到扰动, 系统中某些因素不按规则运行, 但始终保持在有限的范围内, 不会发散出去导致金融系统的崩溃. 当市场经济发展迅速, 货币流量

大时,国家为了防止通货膨胀的出现,可以通过提升利率 x ,汇集市场中流动资金的同时控制贷款总额,从而降低投资需求 y ,加快价格指数 z 的变化,同时二者的变化反作用于利率 x ,使其降低,从而三者间无规则往复变化,互相影响.



(a) 相轨迹



(b) Hamilton 能量的时间变化

图4 系统(9)的动态特性

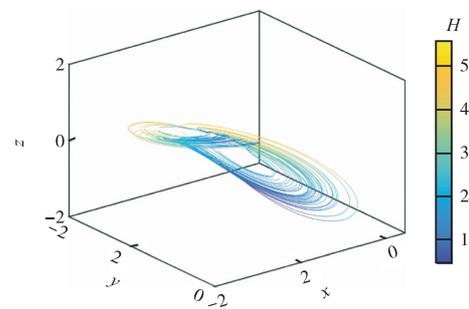
Fig. 4 Dynamic characteristics of the system (9)

2.4 系统包含所有力矩

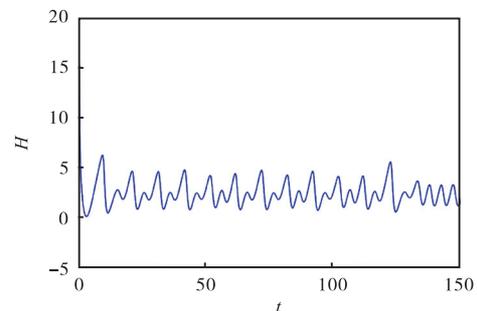
系统包含保守力矩,耗散力矩和外力矩,即 $\dot{X} = \{X, H\} - \Lambda X + f$, 此时方程为系统(1). 这种情况下,系统(1)包含所有力矩. 通过数值分析可知,当参数集 $(a, b, c) = (1, 0.2, 1.1)$ 时,系统(1)从初始条件 $I_0 = (3, 1, 5)$ 出发的轨线呈现混沌. 系统(1)的Hamilton 能量的分布如图 5(a)所示. 此时能量函数 $\dot{H} = -ax^2 - by^2 - cz^2 + y$, 耗散项的存在削减了外力项对系统的混沌影响,系统吸收能量的同时耗散能量,其能量变化是无规律的,如图 5(b)所示.

比较 2.3 节和 2.4 节,这两种情况都会产生混沌行为,系统产生混沌振荡的唯一因素是外力矩 f 中的投资率 1. 在 2.4 节中,混沌的产生是外力矩 f 与耗散力矩 ΛX 的相互作用的结果,在耗散力矩 ΛX 的作用下,系统各状态变量的振荡幅度减弱,系统的混沌行为得到一定程度的控制. 2.4 节比 2.3 节加入了储蓄量 a 、单位投资成本 b 和商品需求弹性 c . 储蓄量 a 的大小直接影响利率 x 的变化,储蓄量 a 偏高时,

央行会降低利率 x ,引导储蓄分流;当储蓄量 a 偏低时,央行会提高利率 x ,从市场汇集资金增加储备,二者呈反比关系. 单位投资成本 b 的增加会降低投资需求 y ,单位投资成本 b 的降低会促使投资需求 y 的增多,呈反比关系. 商品需求弹性 c 表示一定时期内商品需求量的变化对该商品价格的相对变动的反应程度,价格变动引起需求变动变化大,商品富有弹性(非必需品);价格变动引起需求变动变化小或无变化,商品缺乏弹性(必需品),呈反比关系. 所以通过调节储蓄量 a 、单位投资成本 b 和商品需求弹性 c 的值可以对利率 x 、投资需求 y 和价格指数 z 的变化规律进行控制,从而有效控制金融系统的发展趋势.



(a) 能量相图



(b) Hamilton 能量的时间变化

图5 系统(1)处于混沌状态时的能量

Fig. 5 Energy of the system (1) in chaotic state

3 基于有限时间 LaSalle 不变集的混沌控制

3.1 有限时间稳定理论

考虑非线性系统^[17]

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0 \tag{10}$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量; $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为定义域 D 到 n 维空间 \mathbb{R}^n 中的一个连续非线性函数.

定义 1^[18] 当且仅当系统(10)稳定,且在有限时间内收敛时,其平衡点 $x = 0$ 在连续有限时间内稳定,有限时间收敛可表示存在一个连续函数 $T(x): D_0 \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ 使 $\forall x_0 \in D_0 \subset D$. 系统(10)的

解记作 $x(t, x_0)$.

(1) 当 $t \in [0, T(x_0)]$ 时, 有 $x(t, x_0) \in D_0 \setminus \{0\}$ 和

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0;$$

(2) 当 $t > T(x_0)$ 时, 有 $x(t, x_0) = 0$.

当 $D = D_0 = \mathbb{R}^n$, 系统的状态变量总能在有限时间内稳定到平衡点.

定理 1^[19] 设存在一个连续正定函数 $V(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{V}(t) \leq -mV^\xi(t), \forall t > t_0, V(t_0) \geq 0 \quad (11)$$

这里 m 和 ξ 为常数, 且 $m > 0, 0 < \xi < 1$. 对于任意初始时间 t_0 , $V(t)$ 都满足不等式

$$\begin{cases} V^{1-\xi}(t) \leq V^{1-\xi}(t_0) - m(1-\xi)(t-t_0) & t_0 < t < t_1 \\ V(t) = 0 & t > t_1 \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$t_1 = t_0 + \frac{V^{1-\xi}(t_0)}{m(1-\xi)} \quad (13)$$

文献[20]已对定理 1 进行了证明, 此处不再赘述.

3.2 LaSalle 不变集理论

考虑非线性系统

$$\dot{X} = f(X) \quad (14)$$

式中状态变量 $X \in \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为定义域 D 到 n 维空间 \mathbb{R}^n 中的一个连续可微函数, 满足 Lipschitz 条件. 设系统至少有一个平衡点 X^* , 且不知道该平衡点的位置. 引入如下概念:

定义 2 $f(x)$ 在区域上满足 Lipschitz 条件时, 应存在一个常数 l 使得定义域 D 中任意两个不同的实数 x_1 和 x_2 满足不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq l|x_1 - x_2|$. 若 $f(x)$ 在区域上 D 满足 Lipschitz 条件, 必定存在 $f(x)$ 在区域 D 上满足一致连续.

定义 3 设 $x(t)$ 为系统 (14) 的解, 存在时间 $t \rightarrow +\infty$, 使 $x(t) = Q$, 则 Q 为 $x(t)$ 的一个正向极限点.

定义 4 设存在一个域 $M \subset \mathbb{R}^n$, 若对任意初始条件 $x(0) = x_0 \in M$, 系统 (14) 的解 $x(t) = \Phi(t, x_0)$ 满足 $x(t) \in M, \forall t \geq 0$, 则 M 为系统 (14) 的正向不变集, 可以包含系统的 1 个或多个平衡点, 也可以是状态空间的一个子集合^[21].

定理 2 (LaSalle 不变集定理^[22]) 设 Ω 是一个有界闭集合, 从 Ω 集合内出发的系统 (14) 的解 $x(t) \subset \Omega$, 若 $\exists V(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 具有一阶连续偏导, 使 $dV/dt \leq 0$, 又设 $A = \{x | dV/dt = 0, x \in \Omega\}$, $M \subset A$ 是最大不变集, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 有 $x(t) \rightarrow M$, 若 $M = \{0\}$, 则系统平衡点稳定.

3.3 金融系统有限时间 LaSalle 不变集控制

将系统 (1) 从平衡点 $S_1 = (0, 1/b, 0)$ 转移到平衡点 $S_0 = (0, 0, 0)$, 并添加控制器 $u_{1,2}$ 得到受控金融系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + x/b + xy + z + u_1 + u_2 \\ \dot{y} = -by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (15)$$

控制器 $u_{1,2}$ 的设计见式 (16), 因金融系统中的利率 x 的变化受投资需求 y 以及价格指数 z 的影响, 使得系统可能出现混沌行为, 控制器的设计从消除影响利率因素的角度出发, 利用控制器 u_1 消除系统中的物价波动以及投资需求与利率的相互影响, 并通过控制器 u_2 增强利率的自身负相关性, 以达到自身稳定的目的.

$$\begin{cases} u_1 = -x/b - xy - z - x^E \\ u_2 = -px \\ \dot{p} = rx^2 \end{cases} \quad (16)$$

其中参数 $r > 0$, 指数 E 为真分数, p 为状态变量. 将式 (16) 代入状态方程 (15) 的第一项得到

$$\dot{x} = -ax - x^E - px \quad (17)$$

考虑式 (16) 与式 (17) 中 x 与 p 之间的关系, 显然有 $\dot{p} \geq 0$. 构造式 (17) 的 Lyapunov 函数 $V_1 = x^2/2$, 则 V_1 的时间微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -ax^2 - x^{E+1} - px^2 \leq -x^{E+1} = \\ &= -2^{\frac{E+1}{2}} \times \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{E+1}{2}} = -2^{\frac{E+1}{2}} \times (V_1)^{\frac{E+1}{2}} \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

因为 $0 < E < 1$, 所以 $0 < (E+1)/2 < 1$. 根据定理 1 可知, 系统 (17) 能在有限时间 $T_1 = V_1^{1-\xi}/(m_1(1-\xi))$ 内到达 $x=0$ 处, 其中 $\xi = (E+1)/2$. 当 $x=0$ 时, $\dot{V}_1 = 0$ 且 $\dot{x} = 0$, 系统的状态变量 x 渐近稳定到 $x=0$ 处. 再将 $x=0$ 代入系统 (15) 的后两项, 并构造 Lyapunov 函数 $V_2 = (y^2 + z^2)/2$, 对其求导得到

$$\dot{V}_2 = y\dot{y} + z\dot{z} = -by^2 - cz^2 \leq 0 \quad (19)$$

若要式 (19) 中 $\dot{V}_2 = 0$, 需满足状态变量 $y = z = 0$, 则 $\dot{y} = \dot{z} = 0$, 可知系统的状态变量 y 和 z 同样是渐近稳定的. 综上所述, 当时间 $t > T_1$ 时, 系统 (15) 会在控制器 $u_{1,2}$ 以及 p 的作用下到达平衡点 $S_0 = (0, 0, 0)$ 处.

再令 $g(x) = -ax - x^E$, 则必定存在正实数 l 使 $|g(x_1) - g(x_2)| \leq l|x_1 - x_2|$, 所以 $g(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 式 (17) 变换为

$$\dot{x} = g(x) - px \quad (20)$$

构造 Lyapunov 函数 V_3

$$V_3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2r}(L-p)^2 \tag{21}$$

式中 L 为正实数, 且 $L > l$, 对 V_3 沿着式的轨迹求时间微分, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= x\dot{x} - \frac{1}{r}(L-p)\dot{p} = -ax^2 - x^{E+1} - Lx^2 = \\ & xg(x) - Lx^2 \leq (l-L)x^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{22}$$

由于 $L > l$, 因而在 $x \neq 0$ 的情况下 $\dot{V}_3 < 0$, 集合 M 的空间收缩; 当且仅当 $x=0$ 时, 即集合 $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x=0\}$ 是包含于 $\dot{V}_3=0$ 的最大不变集. 根据定理 2 可知, 受控系统 (15) 能被控制器 (式 (16)) 控制到系统平衡点, 可实现有限时间 LaSalle 不变集混沌控制.

3.4 数值仿真

将控制器 $u_{1,2}$ 以及 p 加到系统 (15) 的第一项上, 那么受控金融系统可表示为

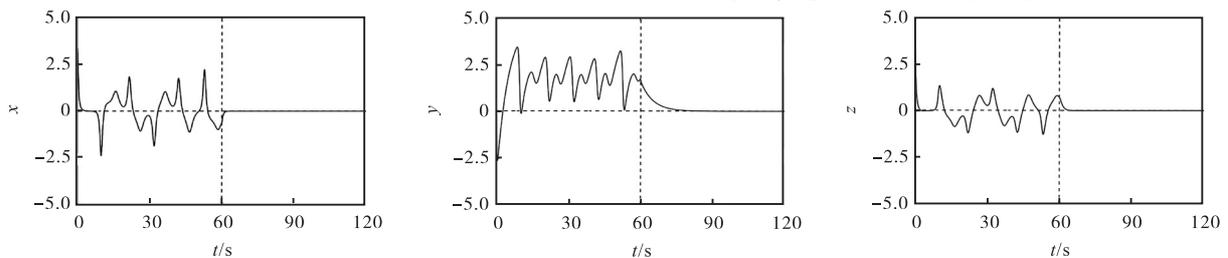


图 6 受控系统 (23) 的时间响应曲线
Fig. 6 Time response curve of the controlled system (23)

注意, 这里的控制器 $u_{1,2}$ 只作用于系统的 \dot{x} , 也就是对利率变化的调节. 在对原系统施加控制后, 振荡的 x 在有限时间 T_1 内被控制到稳定状态, 稳定后的 x 可保证状态变量 y 和 z 的振荡随后同样得到有效控制. 若要用控制器对 \dot{y} 进行控制, 只需先将 y 在有限时间内控制到稳定状态, 从而带动 x 和 z 的收敛振荡, 最终系统达到稳定平衡. 同样的设计思路也适用于对 z 进行控制.

4 结 语

本文从两个方面研究了一种非线性金融系统. 其一, 从力学角度, 将系统分解成 Kolmogorov 系统形式, 分析了不同力矩单独和共同作用于该金融系统时的结果, 剖析了该金融系统产生混沌行为的原因, 并结合金融市场解释了储蓄量和单位投资成本等因素间的作用关系. 其二, 将有限时间理论和 LaSalle 不变集定理结合, 设计了一种自适应控制器. 该控制

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - x^E - px \\ \dot{y} = -by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \\ \dot{p} = rx^2 \end{cases} \tag{23}$$

当 $(a,b,c) = (1,0.2,1.1)$ 、初始条件为 I_0 时, 系统 (1) 处于混沌状态. 现保持系统 (1) 的参数和初始条件不变, 采用四阶 Runge-Kutta 法求解方程, 设步长 $h=0.001$, 状态变量 $p_0=1$, 并选取控制参数 $E=1/2$ 、 $r=1$, 对系统 (1) 的混沌行为进行控制. 在第 60 秒时加入控制器, 状态变量 x 在控制器作用下迅速稳定, 状态变量 y 、 z 随后很快全部稳定到平衡点, 系统 (1) 的混沌振荡得到控制. 图 6 给出受控系统 (23) 的 3 个状态变量的时间响应曲线, 由此可以看出该控制方法可以将金融混沌系统的 3 个状态变量从混沌状态控制到稳定状态. 且状态变量的超调量几乎不存在, 说明该控制方法的鲁棒性较强.

器结构简单、响应速度快且鲁棒性较强, 只对利率的变化调节就能将混沌的金融系统控制到稳定状态, 为该金融系统的动力学研究提供了新的思路和参考.

参考文献:

- [1] 郝大明. 投资需求与货币市场均衡利率的决定[J]. 开发性金融研究, 2018(6): 54-64.
- [2] 叶振飞, 陈伟忠, 杨凌, 等. 金融危机的内在机理分析与混沌控制方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2002, 30(12): 1532-1536.
- [3] KOPEL M. Simple and complex adjustment dynamics in Cournot duopoly models[J]. Chaos, solitons & fractals, 1996, 7(12): 2031-2048.
- [4] WU W, CHEN Z, IP W H. Complex nonlinear dynamics and controlling chaos in a Cournot duopoly economic model[J]. Nonlinear analysis: real world applications, 2010, 11(5): 4363-4377.
- [5] LORENZ H W, NUSSE H E. Chaotic attractors, chaotic

(下转第 80 页)

- tion[J]. Chemistry letters, 1981, 10(10): 1483–1484.
- [23] COWMAN M K, HITTNER D M, FEDER-DAVIS J. ¹³C NMR studies of hyaluronan; conformational sensitivity to varied environments[J]. Macromolecules, 1996, 29(8): 2894–2902.
- [24] SHIBATA I, ISOGAI A. Depolymerization of cellouronic acid during TEMPO-mediated oxidation[J]. Cellulose, 2003, 10(2): 151–158.
- [25] HUANG R, RAJAPAKSE N, Kim S K. Structural factors affecting radical scavenging activity of chitooligosaccharides(COS) and its derivatives[J]. Carbohydrate polymers, 2006, 63(1): 122–129.
- [26] NIMSE S B, PAL D. Free radicals, natural antioxidants, and their reaction mechanisms[J]. RSC advances, 2015, 5: 27986–28006.
- [27] LI H, XU Q, CHEN Y, et al. Effect of concentration and molecular weight of chitosan and its derivative on the free radical scavenging ability[J]. Journal of biomedical materials research part A, 2014, 102(3): 911–916.
- [28] 周元敬, 徐青, 赵红霞, 等. 壳聚糖的改性及其自由基清除性能[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(11): 1613–1620.
- [29] DOROTA K. Adsorption characteristics of chitosan modified by chelating agents of a new generation[J]. Chemical engineering journal, 2012, 179: 33–43.

责任编辑: 周建军

(上接第 72 页)

- saddles, and fractal basin boundaries: goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered[J]. Chaos, solitons & fractals, 2002, 13(5): 957–965.
- [6] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(I) [J]. 应用数学与力学, 2001, 22(11): 1119–1128.
- [7] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(II) [J]. 应用数学与力学, 2001, 22(12): 1236–1242.
- [8] SON W S, PARK Y J. Delayed feedback on the dynamical model of a financial system[J]. Chaos, solitons & fractals, 2011, 44(4): 208–217.
- [9] JIANG Z, GUO Y, ZHANG T. Double delayed feedback control of a nonlinear finance system[J]. Discrete dynamics in nature and society, 2019, 2019: 7254121.
- [10] ZHANG X, ZHU H. Hopf bifurcation and chaos of a delayed finance system[J]. Complexity, 2019, 2019: 6715036.
- [11] ZHENG J, LI X, QIU Y A. Simple hybrid synchronization for a class of chaotic financial systems[J]. Discrete dynamics in nature and society, 2017, 2017: 9129605.
- [12] GAO Q, MA J. Chaos and Hopf bifurcation of a finance system[J]. Nonlinear dynamics, 2009, 58(1/2): 209–216.
- [13] CHEN W. Dynamics and control of a financial system with time-delayed feedback[J]. Chaos, solitons & fractals, 2008, 37(4): 1198–1207.
- [14] ZHENG J, DU B. Projective synchronization of hyper-chaotic financial systems[J]. Discrete dynamics in nature and society, 2015, 2015: 782630.
- [15] ZHANG F, YANG G, ZHANG Y, et al. Qualitative study of a 4D chaos financial system[J]. Complexity, 2018, 2018: 3789873.
- [16] CAI G, DING Y, CHEN Q. SMC chaos control of a novel hyper-chaotic finance system using a new chatter free sliding mode control[J]. Journal of physics: conference series, 2019, 1187(3): 032103.
- [17] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. Society of industrial and applied mathematics journal on control and optimization, 2000, 38(3): 751–766.
- [18] 丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 161–169.
- [19] 高铁红, 陈增强, 袁著祉. 基于鲁棒有限时控制的混沌系统的同步[J]. 物理学报, 2005, 54(6): 2574–2579.
- [20] WANG H, HAN Z, XIE Q, et al. Finite-time chaos control via nonsingular terminal sliding mode control[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2009, 14(6): 2728–2733.
- [21] 韦笃取, 张波, 丘东元, 等. 基于 LaSalle 不变集定理自适应控制永磁同步电动机的混沌运动[J]. 物理学报, 2009, 58(9): 6026–6029.
- [22] LASALLE J P. The extent of asymptotic stability[J]. Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America, 1960, 46(3): 363–365.

责任编辑: 郎婧