

DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20180033

不确定环境下的致命冲击模型

刘 颖, 刘冬雪, 马 瑶

(天津科技大学计算机科学与信息工程学院, 天津 300457)

摘 要: 针对无大量样本存在的冲击模型, 运用不确定理论进行建模和分析. 假设系统由 2 个部件组成且环境中 3 个相互独立的冲击源, 每个冲击到达均引起部件失效且失效的时间为不确定变量, 在此基础上建立致命冲击的基本数学模型并进行分析, 给出两部件寿命的联合生存不确定分布、矩的相关公式和矩母函数. 最后, 给出了数值算例.

关键词: 致命冲击模型; 不确定变量; 不确定分布; 矩

中图分类号: O213.2; N945

文献标志码: A

文章编号: 1672-6510(2019)02-0075-06

Uncertain Fatal Shock Model in Uncertain Environment

LIU Ying, LIU Dongxue, MA Yao

(College of Computer Science and Information Engineering, Tianjin University of Science & Technology,
Tianjin 300457, China)

Abstract: In this research, the shock model short of a large number of samples is studied and developed in the light of the uncertainty theory. Assuming that the system is composed of two components and has three independent shock sources, and also that the shock sources leading to the failure of the components and time are uncertain, a fatal shock model is established and analyzed, and the life time of the joint survival uncertainty distribution of the two components as well as some basic theorems are calculated. This paper introduced all this mentioned above with a numerical example.

Key words: fatal shock model; uncertain variables; uncertainty distribution; moment

冲击模型是可靠性数学理论中的主要研究内容之一, 其研究的中心问题是系统失效时间或系统寿命^[1]. 它在交通^[2]、保险^[3]、维修^[4]、自然保护^[5]等领域有着广泛的应用. 例如, 在飞机设计和验证定理过程中, 冲击模型可用于预测飞机结构件的疲劳寿命和可靠性; 在环境保护领域, 冲击模型可用于分析自然保护区的寿命行为和失效规律; 在对金属化膜脉冲电容器“自愈”的失效机理进行研究时, 选取合适的冲击模型对金属化膜冲击电容器可靠性进行评估; 在保险问题上, 也可利用冲击模型对保险风险系统进行建模并给出破产概率估计等.

人们对冲击模型的研究已久, 如, Esary 等^[6]在基础过程是齐次 Poisson 过程的情况下研究了系统的寿命分布, 给出了生存函数的 IFR、IFRA 与 NBU 等性

质. 随后 A-Hameed 等^[7]将基础过程推广至非齐次 Poisson 过程的情形. Shanthikumar 等^[8-9]提出了一般冲击模型. Anderson^[10]研究冲击之间的时间间隔具有无限期望的一般冲击模型. Gut^[11]建立了混合冲击模型. Lam 等^[12]研究了可修系统维修问题的冲击模型. 马明等^[13]主要研究截断 δ 冲击模型的参数估计问题, 利用极大似然估计法得到截断 δ 冲击模型的参数估计量, 并分析了其无偏性. Cha 提出并分析了基于广义波利亚新法的新冲击模型^[14]. 姜培华^[15]建立了一类簇生离散冲击模型, 每个周期的冲击次数服从独立同分布的二项随机变量, 在累积冲击和极端冲击两种情形下, 研究了系统寿命的生存函数和平均寿命.

在研究冲击模型的过程中不得不面对各种非确定性因素. 随机性是一种客观非确定性, 概率论是研

收稿日期: 2018-01-25; 修回日期: 2018-05-04

基金项目: 天津市应用基础与前沿技术研究计划项目(16JCYBJC18500); 天津市企业科技特派员项目(17JCTPJC54100)

作者简介: 刘 颖 (1982—), 女(回), 天津人, 副教授, liu@tust.edu.cn

究这种非确定性的有效数学工具. 但是使用概率论处理工程问题需要满足 3 个前提: 事件需明确定义; 有大量样本存在; 样本之间具有概率重复性. 当不同时满足以上的条件时, 将不能运用概率论解决问题. 这时, 一些学者开始运用模糊理论处理此类问题. 但 Liu^[16]提出的货车过桥问题, 分析得出模糊变量并不是适合于不确定量建模的工具这一结论, 说明模糊理论处理问题同样存在局限性.

2007 年, 清华大学的刘宝碇教授提出了不确定理论^[17]. 近年来, 不确定理论被广泛应用在不确定微分方程^[18]、不确定统计^[19]、不确定规划^[20]、不确定金融^[21]、不确定控制^[22]等众多研究领域. 本文将不确定理论引入致命冲击模型的研究中, 可对样本规模较小的一类问题进行建模和分析, 解决使用概率论建模及可靠性分析不精准的问题.

1 不确定理论

刘宝碇教授提出了不确定理论之后, 又对该理论进行了细化和补充, 下面给出与本文相关的定义和定理^[17, 23].

假设 Γ 是非空集合, L 是 Γ 上的子集构成的 σ -代数, L 中的每一个元素 A 称之为事件. 那么, 为了进一步介绍不确定理论的公理化定义, 对每个事件 A 发生的信度指定一个数值 $M\{A\}$, 其中信度 M 需要满足 Liu^[17]提出的 4 条公理:

公理 1 (规范性) 对于全集 Γ , 有 $M\{\Gamma\} = 1$.

公理 2 (单调性) 对于任意事件, 当 $A_1 \subset A_2$ 时有

$$M\{A_1\} \leq M\{A_2\}$$

公理 3 (自对偶性) 对于任何事件 A 和 A^c , 有

$$M\{A\} + M\{A^c\} = 1$$

公理 4 (次可加性) 对于任意可列可数事件列 $A_1, A_2, \dots$, 都有

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} M\{A_i\}$$

定义 1 若集函数 M 满足规范性、单调性、自对偶性和次可加性, 则称 M 是非空集合 Γ 上的不确定测度.

定义 2 设 Γ 为非空集合, L 是由 Γ 的子集构成的 σ -代数, M 是不确定测度, 则称三元组 (Γ, L, M) 为不确定空间.

定义 3 不确定变量 ξ 定义为从不确定空间 (Γ, L, M) 到实数集的可测函数, 即对任意 Borel 集

B , 集合 $\{\gamma \in \Gamma | \xi(\gamma) \in B\} \in L$ 为一个事件.

定义 4 不确定变量 ξ 的不确定分布 Φ 定义为实数集上的函数, 对于任意实数 x ,

$$\Phi(x) = M\{\xi \leq x\}, \text{ 其中 } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

注: 由公理 3 可知

$$\bar{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x) \quad (2)$$

定义 5 不确定变量 ξ 为线性不确定变量, 若其不确定分布

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x-a)/(b-a) & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad (3)$$

记作 $L(a, b)$, 对于任何的实数 a 和 b 都有 $a < b$.

定义 6 设 ξ 为不确定变量, Φ 为其分布函数, 那么 Φ 的反函数 Φ^{-1} 称为不确定变量 ξ 的逆分布.

定义 7 线性不确定变量 $L(a, b)$ 的逆不确定分布为

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a + \alpha b \quad (4)$$

定义 8 若 ξ 为不确定变量, M 为不确定测度, 那么 ξ 的期望值定义为

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} M\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 M\{\xi \leq x\} dx \quad (5)$$

只要以上两个积分中至少有一个是有限的.

定理 1 若不确定变量 ξ 的不确定分布函数为 Φ , 且 ξ 的期望存在, 则 $E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi(x)$

定理 2 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 分别是相互独立的不确定变量且具有连续不确定分布 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$. 若 f 是严格递减函数, 则 $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 具有不确定分布

$$\psi(x) = \sup_{f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x} \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \Phi_i(x_i)) \quad (6)$$

定理 3 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 分别是相互独立的不确定变量且具有规则不确定分布 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$. 若 $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 对为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 严格递增, 对 $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots, \xi_n$ 严格递减, 则 $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的期望值为

$$E[\xi] = \int_0^1 f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) d\alpha \quad (7)$$

2 建立模型

假设系统由 2 个部件组成 (图 1), 这些部件在受到外界冲击后会失效, 冲击到达的时间为不确定变量. 系统中有 3 个相互独立的冲击源, 当冲击 1 发生时, 仅引起部件 1 失效, 冲击发生的时间用 U_1 表示,

其不确定分布为 $\Phi_1(x)$; 当冲击 2 发生时, 仅引起部件 2 失效, 冲击发生的时间用 U_2 表示, 其不确定分布为 $\Phi_2(x)$; 当冲击 3 发生时, 同时引起 2 个部件失效, 冲击发生的时间用 U_{12} 来表示, 其不确定分布为 $\Phi_{12}(x)$. 因此, 可知部件 1 和部件 2 的不确定寿命 X_1 和 X_2 分别为

$$X_1 = \min\{U_1, U_{12}\} \quad (8)$$

$$X_2 = \min\{U_2, U_{12}\} \quad (9)$$

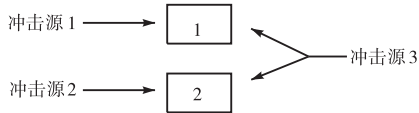


图 1 冲击模型

Fig. 1 A shock model

定理 4 X_1 与 X_2 的联合生存不确定分布为

$$\bar{\Phi}(t_1, t_2) = \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(\max\{t_1, t_2\}) \quad (10)$$

证明: 当 $0 \leq t_1 \leq t_2$ 时, 由式 (1)、式 (2)、式 (8) 和式 (9) 可知

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t_1, t_2) &= M\{X_1 > t_1, X_2 > t_2\} = \\ &= M\{\min\{U_1, U_{12}\} > t_1, \min\{U_2, U_{12}\} > t_2\} = \\ &= M\{U_1 > t_1, U_2 > t_2, U_{12} > t_2\} = \\ &= M\{U_1 > t_1\} \wedge M\{U_2 > t_2\} \wedge M\{U_{12} > t_2\} = \\ &= \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2) \end{aligned} \quad (11)$$

当 $0 \leq t_2 \leq t_1$ 时, 由式 (1)、式 (2)、式 (8) 和式 (9) 可知

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t_1, t_2) &= M\{X_1 > t_1, X_2 > t_2\} = \\ &= M\{\min\{U_1, U_{12}\} > t_1, \min\{U_2, U_{12}\} > t_2\} = \\ &= M\{U_1 > t_1, U_2 > t_2, U_{12} > t_1\} = \\ &= M\{U_1 > t_1\} \wedge M\{U_2 > t_2\} \wedge M\{U_{12} > t_1\} = \\ &= \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_1) \end{aligned} \quad (12)$$

综合式 (11) 和式 (12), 有

$$\bar{\Phi}(t_1, t_2) = \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(\max\{t_1, t_2\})$$

证毕.

定理 5 X_1 和 X_2 的边缘生存不确定分布分别为

$$\bar{\Phi}(t_1) = \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_1) \quad (13)$$

$$\bar{\Phi}(t_2) = \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2) \quad (14)$$

证明: 由式 (1)、式 (2)、式 (8) 和式 (9) 可得该致命冲击模型的边缘生存不确定分布分别为

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t_1) &= M\{X_1 > t_1\} = \\ &= M\{\min\{U_1, U_{12}\} > t_1\} = \\ &= M\{U_1 > t_1, U_{12} > t_1\} = \\ &= M\{U_1 > t_1\} \wedge M\{U_{12} > t_1\} = \\ &= \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t_2) &= M\{X_2 > t_2\} = \\ &= M\{\min\{U_2, U_{12}\} > t_2\} = \\ &= M\{U_2 > t_2, U_{12} > t_2\} = \\ &= M\{U_2 > t_2\} \wedge M\{U_{12} > t_2\} = \\ &= \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2) \end{aligned}$$

证毕.

定理 6 X_1 和 X_2 的平均寿命分别为

$$EX_1 = \int_0^{+\infty} (\bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_1)) dt_1 \quad (15)$$

$$EX_2 = \int_0^{+\infty} (\bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2)) dt_2 \quad (16)$$

证明: 由式 (1)、式 (2) 和式 (5) 可得

$$\begin{aligned} EX_1 &= \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t_1)) dt_1 = \\ &= \int_0^{+\infty} \bar{\Phi}(t_1) dt_1 = \\ &= \int_0^{+\infty} (\bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_1)) dt_1 \\ EX_2 &= \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t_2)) dt_2 = \\ &= \int_0^{+\infty} \bar{\Phi}(t_2) dt_2 = \\ &= \int_0^{+\infty} (\bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2)) dt_2 \end{aligned}$$

证毕.

定理 7 若 X_1 和 X_2 为不确定寿命, 则有

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \int_0^1 \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) \\ &\quad \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) d\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

证明: 由式 (7)、式 (8) 和式 (9) 可得

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E[\min(U_1, U_{12}) \min(U_2, U_{12})] = \\ &= \int_0^1 \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \\ &\quad \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) d\alpha \end{aligned}$$

证毕.

定理 8 若 X_1 和 X_2 为不确定寿命, 则有

$$\begin{aligned} E[X_1 \cup X_2] &= \int_0^1 \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) \cup \\ &\quad \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) d\alpha \end{aligned} \quad (18)$$

证明: 由式 (7)、式 (8) 和式 (9) 可得

$$\begin{aligned} E[X_1 \cup X_2] &= \\ &= E[\min(U_1, U_{12}) \cup \min(U_2, U_{12})] = \\ &= \int_0^1 \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) \cup \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) d\alpha \end{aligned}$$

证毕.

定理 9 X_1 和 X_2 的矩母函数为

$$\begin{aligned} E[e^{-(sX_1 + tX_2)}] &= \\ &= \int_0^1 e^{-[s \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) + t \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha))]} d\alpha \end{aligned} \quad (19)$$

证明: 由式(7)、式(8)和式(9), 可得 X_1 和 X_2 的矩母函数为

$$\begin{aligned} E[e^{-(sX_1+tX_2)}] &= \\ E[e^{-(s\min(U_1, U_{12})+t\min(U_2, U_{12}))}] &= \\ E[e^{-(s\min(U_1, U_{12}))}e^{-(t\min(U_2, U_{12}))}] &= \\ \int_0^1 e^{-(s\min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)))} e^{-(t\min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)))} d\alpha \end{aligned}$$

证毕.

3 算例

在上述模型中, 若假设 U_1, U_2, U_{12} 分别为线性不确定变量 $L[1, 4], L[1.2, 4], L[1.5, 3.5]$, 由式(3)可知其分布函数分别为

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= (x-1)/3 \\ \Phi_2(x) &= (x-1.2)/2.8 \\ \Phi_{12}(x) &= (x-1.5)/2 \end{aligned}$$

由式(4)可知其逆不确定分布函数分别为

$$\begin{aligned} \Phi_1^{-1}(\alpha) &= 1+3\alpha \\ \Phi_2^{-1}(\alpha) &= 1.2+2.8\alpha \\ \Phi_{12}^{-1}(\alpha) &= 1.5+2\alpha \end{aligned}$$

由定理4可求 X_1 与 X_2 的联合不确定分布

$$\bar{\Phi}(t_1, t_2) = \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2) = \begin{cases} (1-\frac{t_1-1}{3}) \wedge (1-\frac{t_2-1.2}{2.8}) \wedge (1-\frac{t_2-1.5}{2}) & 0 \leq t_1 \leq t_2 \\ (1-\frac{t_1-1}{3}) \wedge (1-\frac{t_2-1.2}{2.8}) \wedge (1-\frac{t_1-1.5}{2}) & 0 \leq t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

由定理5可得 X_1, X_2 的边缘生存不确定分布为

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t_1) &= \bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_1) = \\ & (1-\frac{t_1-1}{3}) \wedge (1-\frac{t_1-1.5}{2}) \\ \bar{\Phi}(t_2) &= \bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2) = \\ & (1-\frac{t_2-1.2}{2.8}) \wedge (1-\frac{t_2-1.5}{2}) \end{aligned}$$

由定理6可知, 各部件寿命分别为

$$\begin{aligned} EX_1 &= \int_0^{+\infty} (\bar{\Phi}_1(t_1) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_1)) dt_1 = \\ & \int_0^{+\infty} (1-\Phi_1(t_1)) \wedge (1-\Phi_{12}(t_1)) dt_1 = \\ & \int_0^{+\infty} (1-\frac{t_1-1}{3}) \wedge (1-\frac{t_1-1.5}{2}) dt_1 \\ EX_2 &= \int_0^{+\infty} (\bar{\Phi}_2(t_2) \wedge \bar{\Phi}_{12}(t_2)) dt_2 = \\ & \int_0^{+\infty} (1-\Phi_2(t_2)) \wedge (1-\Phi_{12}(t_2)) dt_2 = \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} (1-\frac{t_2-1.2}{2.8}) \wedge (1-\frac{t_2-1.5}{2}) dt_2$$

由定理7, 有

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \\ \int_0^1 \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) d\alpha &= \\ \int_0^1 \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha = \\ \int_0^{0.375} \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha + \\ \int_{0.375}^{0.5} \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha + \\ \int_{0.5}^1 \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha = \\ \int_0^{0.375} (1+3\alpha)(1.2+2.8\alpha) d\alpha + \\ \int_{0.375}^{0.5} (1+3\alpha)(1.5+2\alpha) d\alpha + \\ \int_{0.5}^1 (1.5+2\alpha)(1.5+2\alpha) d\alpha = \\ (2.8\alpha^3 + 3.2\alpha^2 + 1.2\alpha) \Big|_0^{0.375} + \\ (2\alpha^3 + 3.25\alpha^2 + 1.5\alpha) \Big|_{0.375}^{0.5} + \\ (\frac{4}{3}\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2.25\alpha) \Big|_{0.5}^1 \approx 6.277 \end{aligned}$$

由定理8, 有

$$\begin{aligned} E[X_1 \cup X_2] &= \\ \int_0^1 \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) \cup \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \\ & \Phi_{12}^{-1}(\alpha)) d\alpha = \\ \int_0^1 \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \cup \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha = \\ \int_0^{0.375} \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \cup \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha + \\ \int_{0.375}^{0.5} \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \cup \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha + \\ \int_{0.5}^1 \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)) \cup \min((1.2+2.8\alpha), \\ & (1.5+2\alpha)) d\alpha = \\ \int_0^{0.375} (1+3\alpha) \cup (1.2+2.8\alpha) d\alpha + \\ \int_{0.375}^{0.5} (1+3\alpha) \cup (1.5+2\alpha) d\alpha + \\ \int_{0.5}^1 (1.5+2\alpha) \cup (1.5+2\alpha) d\alpha = \end{aligned}$$

$$\int_0^{0.375} (1.2 + 2.8\alpha) d\alpha + \int_{0.375}^{0.5} (1.5 + 2\alpha) d\alpha + \int_{0.5}^1 (1.5 + 2\alpha) d\alpha = (1.2\alpha + 1.4\alpha^2) \Big|_0^{0.375} + (1.5\alpha + \alpha^2) \Big|_{0.375}^{0.5} + (1.5\alpha + \alpha^2) \Big|_{0.5}^1 \approx 3.569$$

由定理 9 可得, X_1, X_2 的矩母函数为

$$\begin{aligned} E[e^{-(sX_1 + tX_2)}] = & \int_0^1 e^{-(s \min(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)))} e^{-(t \min(\Phi_2^{-1}(\alpha), \Phi_{12}^{-1}(\alpha)))} d\alpha = \\ & \int_0^1 e^{-(s \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)))} e^{-(t \min((1.2+2.8\alpha), (1.5+2\alpha)))} d\alpha = \\ & \int_0^{0.375} e^{-(s \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)))} e^{-(t \min((1.2+2.8\alpha), (1.5+2\alpha)))} d\alpha + \\ & \int_{0.375}^{0.5} e^{-(s \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)))} e^{-(t \min((1.2+2.8\alpha), (1.5+2\alpha)))} d\alpha + \\ & \int_{0.5}^1 e^{-(s \min((1+3\alpha), (1.5+2\alpha)))} e^{-(t \min((1.2+2.8\alpha), (1.5+2\alpha)))} d\alpha = \\ & \int_0^{0.375} e^{-s(1+3\alpha)} e^{-t(1.2+2.8\alpha)} d\alpha + \int_{0.375}^{0.5} e^{-s(1+3\alpha)} e^{-t(1.5+2\alpha)} d\alpha + \\ & \int_{0.5}^1 e^{-s(1.5+2\alpha)} e^{-t(1.5+2\alpha)} d\alpha = \\ & \frac{0.8t}{9s^2 + 14.4st + 5.6t^2} e^{-(2.125s + 2.25t)} + \\ & \frac{s}{6s^2 + 10st + 4t^2} e^{-(2.5s + 2.5t)} + \\ & \frac{1}{3s + 2.8t} e^{-(s + 1.2t)} - \frac{1}{2s + 2t} e^{-(3.5s + 3.5t)} \end{aligned}$$

4 结 语

不确定理论是建立在规范性、自对偶性、次可加性和乘积测度公理化体系之上的数学分支。当样本规模较小时, 概率论将不再有效, 此时, 采用不确定理论可解决此类问题。本文研究不确定环境下的致命冲击模型, 将冲击源引起部件失效的时间视作不确定变量, 进行建模和分析, 给出了冲击模型的联合生存不确定分布及相关定理。为计算简便, 给出了不确定变量服从线性分布时的数值算例, 但该方法同样适用于任意不确定分布。

致谢: 本文研究得到“2018 年中国轻工业重点实验室开放课题(KFKT2018C09)”的资助, 特此致谢!

参考文献:

- [1] 李泽慧, 黄宝胜, 王冠军. 一种冲击源下冲击模型的寿命分布及其性质[J]. 兰州大学学报, 1999, 35(4): 1-7.
- [2] 余芬, 韩景强, 张伟钢. 基于冲击模型的飞机结构件疲劳寿命预测及可靠性分析[J]. 飞机设计, 2016,

36(3): 39-42.

- [3] 白建明, 肖鸿民. 一类新的累积冲击模型的性质及在保险风险理论中的应用[J]. 兰州大学学报, 2008, 44(1): 132-136.
- [4] 邢春柳. 累积冲击模型的维修更换策略研究[D]. 南京: 东南大学, 2014.
- [5] 王琪, 白建明, 贾泽龙, 等. 基于冲击模型方法的自然保护区可靠性研究: 以草海为例[J]. 中国人口·资源与环境, 2017, 27(5): 170-176.
- [6] Esary J D, Marshall A W, Proschan F. Shock models and wear process[J]. Annals of Probability, 1973, 1(4): 627-649.
- [7] A-Hameed M S, Proschan F. Nonstationary shock models[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1973, 1(4): 383-404.
- [8] Shanthikumar J G, Sumita U. General shock models associated with correlated renewal sequences[J]. Journal of Applied Probability, 1983, 20(3): 600-614.
- [9] Shanthikumar J G, Sumita U. Distribution properties of the system failure time in a general shock model[J]. Journal of Applied Probability, 1984, 16(2): 363-377.
- [10] Anderson K K. Limit theorems for general shock models with infinite mean intershock times[J]. Journal of Applied Probability, 1987, 24(2): 449-456.
- [11] Gut A. Mixed shock models[J]. Bernoulli, 2001, 7(3): 541-555.
- [12] Lam Y, Zhang Y L. A shock model for the maintenance problem of a repairable system[J]. Computers & Operations Research, 2004, 31(11): 1807-1820.
- [13] 马明, 白静盼, 郑莹. 截断 δ 冲击模型的参数估计[J]. 数学杂志, 2015, 35(2): 389-396.
- [14] Ji H C, Finkelstein M. New shock models based on the generalized Polya process[J]. European Journal of Operational Research, 2016, 251(1): 135-141.
- [15] 姜培华. 周期冲击下簇生离散冲击模型的可靠性分析[J]. 统计与决策, 2017(4): 40-44.
- [16] Liu B D. Why is there a need for uncertainty theory?[J]. Journal of Uncertain Systems, 2012, 6(1): 3-10.
- [17] Liu B D. Uncertainty Theory[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [18] Chen X W, Liu B D. Existence and uniqueness theorem for uncertain differential equations[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2010, 9(1): 69-81.
- [19] Chen X W, Ralescu D A. B-spline method of uncertain statistics with application to estimating travel dis-

- tance[J]. Journal of Uncertain Systems, 2012, 6(4): 256–262.
- [20] Liu B D. Theory and Practice of Uncertain Programming[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [21] Chen X W, Liu Y H, Ralescu D A. Uncertain stock model with periodic dividends[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2013, 12(1): 111–123.
- [22] Zhu Y G. Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model[J]. Cybernetics and Systems, 2010, 41(7): 535–547.
- [23] Liu B D. Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

责任编辑: 常涛, 周建军

(上接第 59 页)

- and detoxification of a Congo red dye solution by means of ozone treatment for a possible water reuse[J]. Journal of Hazardous Materials, 2009, 161(2): 974–981.
- [8] He Z Q, Lin L L, Song S, et al. Mineralization of C. I. Reactive Blue 19 by ozonation combined with sonolysis: Performance optimization and degradation mechanism[J]. Separation and Purification Technology, 2008, 62(2): 376–381.
- [9] Zhang H, Lü Y J, Liu F, et al. Degradation of C. I. Acid Orange 7 by ultrasound enhanced ozonation in a rectangular air-lift reactor[J]. Chemical Engineering Journal, 2008, 138(1): 231–238.
- [10] 吴耀国, 赵大为, 焦剑, 等. 臭氧化的负载型非均相催化制及其作用机理[J]. 材料导报, 2005, 19(10): 8–11.
- [11] 洪浩峰, 潘湛昌, 徐阁, 等. 活性炭负载催化剂臭氧催化氧化处理印染废水研究[J]. 工业用水与废水, 2010, 41(3): 29–33.
- [12] 袁森卉. 粉煤灰基催化剂催化臭氧氧化深度处理印染废水的研究[D]. 苏州: 苏州科技学院, 2012.
- [13] Patnaik P. Handbook of Inorganic Chemicals[M]. New York: McGraw-Hill, 2003.
- [14] He K, Dong Y, Yin L, et al. A facile hydrothermal method to synthesize nanosized $\text{Co}_3\text{O}_4/\text{CeO}_2$ and study of its catalytic characteristic in catalytic ozonation of phenol[J]. Catalysis Letters, 2009, 133(1/2): 209.
- [15] Qi F, Xu B, Chen Z, et al. Catalytic ozonation of 2-isopropyl-3-methoxypyrazine in water by $\gamma\text{-AlOOH}$ and $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$: Comparison of removal efficiency and mechanism[J]. Chemical Engineering Journal, 2013, 219: 527–536.
- [16] 张冉. 非均相催化臭氧氧化深度处理煤化工废水[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.
- [17] Li W W, Qiang Z M, Zhang T, et al. Kinetics and mechanism of pyruvic acid degradation by ozone in the presence of PdO/CeO_2 [J]. Applied Catalysis B: Environmental, 2012, 113: 290–295.
- [18] Qi F, Xu B, Zhao L, et al. Comparison of the efficiency and mechanism of catalytic ozonation of 2, 4, 6-trichloroanisole by iron and manganese modified bauxite[J]. Applied Catalysis B: Environmental, 2012, 121: 171–181.

责任编辑: 周建军

(上接第 74 页)

- [5] 常俊林, 魏巍, 梁君燕. 基于支持向量机的 SURF 改进算法[C]// 第三十届中国控制会议论文集 C 卷. 北京: 中国自动化学会控制理论专业委员会, 2011: 3083–3087.
- [6] 贡超, 蒋建国, 齐美彬. 基于扩散距离的 SURF 特征图像匹配算法[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2015, 38(4): 474–478.
- [7] 胡旻涛, 彭勇, 徐赞. 基于改进 SURF 的快速图像配准算法[J]. 传感器与微系统, 2017, 36(11): 151–153.
- [8] 张锐娟, 张建奇, 杨翠. 基于 SURF 的图像配准方法研究[J]. 红外与激光工程, 2009, 38(1): 160–165.
- [9] 尧思远, 王晓明, 左帅. 基于 SURF 的特征点快速匹配算法[J]. 激光与红外, 2014, 44(3): 347–350.
- [10] 何周灿, 王庆, 杨恒. 一种面向快速图像匹配的扩展 LSH 算法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2010, 47(2): 269–274.

责任编辑: 常涛, 周建军