



DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20170089

分数阶 Liu 混沌系统的 Adomian 分解法求解及数字实现

雷腾飞¹, 陈恒², 付海燕¹

(1. 齐鲁理工学院电气信息工程学院, 济南 250200; 2. 西京学院理学院, 西安 710123)

摘要: 针对一类分数阶临界 Liu 混沌系统, 对分数阶微积分采用改进 Adomian 分解法, 从混沌相图、分岔图、复杂度以及分岔空间等方面仿真分析了该分数阶(0.9 阶)Liu 系统的动力学特性. 同时, 采用高频率运算数字芯片 DSP 设计相关程序以及简单硬件电路, 实现了分数阶 Liu 混沌系统. 示波器观察结果与仿真结果一致, 从数字电路实现方面阐述了系统的混沌特性.

关键词: Adomian 分解法; 复杂度; 分数阶; 混沌系统

中图分类号: O415.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6510(2018)05-0073-06

Solution to the Fractional-order Liu Chaotic System Based on Adomian Decomposition and its Digital Implementation

LEI Tengfei¹, CHEN Heng², FU Haiyan¹

(1. School of Electrical Engineering and Information, Qilu Institute of Technology, Jinan 250200, China;
2. School of Science, Xijing University, Xi'an 710123, China)

Abstract: In this research, fractional order Liu chaotic system is studied based on Adomian decomposition method. The dynamic characteristics of the fractional order (0.9 order)Liu system are analyzed from the aspects of chaotic phase diagram, bifurcation diagram, complexity and bifurcation space. At the same time, the fractional Liu chaotic system is realized by using high frequency digital chip DSP and simple hardware circuit. The observation results with oscilloscope are consistent with the simulation results, and the chaotic characteristics of the system are described based on the realization of digital circuit.

Key words: Adomian decomposition; complexity; fractional-order; chaotic system

17 世纪 90 年代, 在整数阶微积分提出不久, 即出现了分数阶微积分的概念. 近年来, 混沌动力学相关理论广泛应用于各个领域^[1], 其中随着分数阶系统的理论发展, 以经典的混沌系统为研究对象, 重新引入分数阶微积分算子, 即提出了许多分数混沌系统如分数阶 Chen 系统^[2-3]、分数阶 Lü 系统^[4]、分数阶 Lorenz 系统^[5]等.

目前, 研究人员已在分数阶混沌系统分析与控制领域取得一定的成果, 但分数阶混沌系统动力学分析的相关工作等却是最近才开始, 且相关文献较少. 关于分数阶的定义较多, 基于此的分数阶微积分数值方法也存在不同^[6]. 文献[7-9]将分数阶模型通过拉氏变

换到频域中, 利用高阶系统模拟分数阶系统, 分别对分数阶 Lorenz、分数阶超 Qi、分数阶超 Lorenz 混沌系统进行基本动力学分析, 同时采用模拟电路实现了相应的混沌系统. 文献[10]采用预估矫正法对分数阶混沌进行同步控制研究. 文献[11-12]采用 Adomian 分解法对分数阶 Chen 以及 Lü 系统进行混沌特性的分析与研究, 该方法的不足在于不可阐述分数阶的记忆特性.

分数阶 Liu 混沌系统, 一般称为临界混沌系统, 该系统与经典的混沌系统(Lonrez 系统、Chen 系统以及 Lü 系统)存在不等价的拓扑, 故对分数阶 Liu 混沌系统的动力特性的探究讨论尤为重要. 若进一步利

收稿日期: 2017-04-06; 修回日期: 2018-05-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61371163); 山东省自然科学基金资助项目(ZR2017PA008)

作者简介: 雷腾飞(1988—), 男, 山东肥城人, 讲师, leitengfeicanhe@126.com

用改进的 Adomian 分解法,则能够更加准确地分析分数阶 Liu 混沌系统的基本动力学,这对于认识分数阶混沌系统的机理具有重要意义,特别是阶数对系统的影响.

本文采用改进的 Adomian 分解法对分数阶 Liu 混沌系统进行分解与数值仿真,根据数值仿真结果分析 0.9 阶的 Liu 混沌系统的基本动力学行为.同时,利用 DSP 芯片实现了基于改进 Adomian 分解法的分数阶 Liu 系统,从而说明分数阶 Liu 混沌系统的混沌吸引子存在性,也为进一步在混沌密码、机电耦合系统控制以及图像、文字视频加密领域的应用^[13-14]提供参考.

1 分数阶 Liu 混沌系统

文献[15]提出经典的含有平方项的临界 Liu 混沌系统,根据此系统可写出分数阶 Liu 混沌系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = a(y-x) \\ \frac{d^q y}{dt^q} = bx - kxz \\ \frac{d^q z}{dt^q} = hx^2 - cz \end{cases} \quad (1)$$

对式(1)系统进行非线性项的分解,截取前 6 项

$$\begin{cases} A_2^0 = -x^0 z^0 \\ A_2^1 = -x^1 z^0 - x^0 z^1 \\ A_2^2 = -x^2 z^0 - x^1 z^1 - x^0 z^2 \\ A_2^3 = -x^3 z^0 - x^2 z^1 - x^1 z^2 - x^0 z^3 \\ A_2^4 = -x^4 z^0 - x^3 z^1 - x^2 z^2 - x^1 z^3 - x^0 z^4 \\ A_2^5 = -x^5 z^0 - x^4 z^1 - x^3 z^2 - x^2 z^3 - x^1 z^4 - x^0 z^5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} A_3^0 = x^0 x^0 \\ A_3^1 = 2x^1 x^0 \\ A_3^2 = 2x^2 x^0 + x^1 x^1 \\ A_3^3 = 2x^3 x^0 + 2x^2 x^1 \\ A_3^4 = 2x^4 x^0 + 2x^3 x^1 + x^2 x^2 \\ A_3^5 = 2x^5 x^0 + 2x^4 x^1 + 2x^3 x^2 \end{cases} \quad (3)$$

给定初始状态: $x^0 = x(t_0) = c_1^0$, $y^0 = y(t_0) = c_2^0$, $z^0 = z(t_0) = c_3^0$,根据改进 Adomian 分解法^[16]和分数阶微积分性质得

$$\begin{cases} x^1 = a(c_2^0 - c_1^0) \frac{(t-t_0)^q}{q} \\ y^1 = [bc_1^0 - kc_1^0 c_3^0] \frac{(t-t_0)^q}{q} \\ z^1 = (hc_1^0 c_1^0 - cc_3^0) \frac{(t-t_0)^q}{q} \end{cases} \quad (4)$$

将相对应的变量赋系数值,令

$$\begin{cases} c_1^1 = a(c_2^0 - c_1^0) \\ c_2^1 = bc_1^0 - kc_1^0 c_3^0 \\ c_3^1 = hc_1^0 c_1^0 - cc_3^0 \end{cases} \quad (5)$$

可见,只需求出每一项对应的系数即可.根据改进 Adomian 分解法运算可知

$$\begin{cases} c_1^2 = a(c_2^1 - c_1^1) \\ c_2^2 = bc_1^1 - kc_1^1 c_3^1 - kc_1^0 c_3^1 \\ c_3^2 = 2hc_1^1 c_1^0 - cc_3^1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} c_1^3 = a(c_2^2 - c_1^2) \\ c_2^3 = bc_1^2 - k(c_1^2 c_3^0 + c_1^0 c_3^2 + 2c_1^1 c_3^1) \\ c_3^3 = h(2c_1^2 c_1^0 + 2c_1^1 c_1^1) - cc_3^2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} c_1^4 = a(c_2^3 - c_1^3) \\ c_2^4 = bc_1^3 - k[c_1^3 c_3^0 + c_1^0 c_3^3 + 3(c_1^1 c_3^2 + c_1^2 c_3^1)] \\ c_3^4 = h[2c_1^3 c_1^0 + 6c_1^1 c_1^2] - cc_3^3 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} c_1^5 = a(c_2^4 - c_1^4) \\ c_2^5 = bc_1^4 - k(c_1^4 c_3^0 + c_1^0 c_3^4 + 4(c_1^1 c_3^3 + c_1^2 c_3^2) - 6c_1^2 c_3^1) \\ c_3^5 = h[2c_1^4 c_1^0 + 8c_1^1 c_1^3 + 6c_1^2 c_1^2] - cc_3^4 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} c_1^6 = a(c_2^5 - c_1^5) \\ c_2^6 = bc_1^5 - k(c_1^5 c_3^0 + c_1^0 c_3^5 + 10(c_1^1 c_3^4 + c_1^2 c_3^3) + 5(c_1^1 c_3^4 + c_1^4 c_3^1)) \\ c_3^6 = h[2c_1^5 c_1^0 + 20c_1^1 c_1^4 + 10c_1^1 c_1^4] - cc_3^5 \end{cases} \quad (10)$$

从而,得出系统的解

$$x_j(x) = \sum_{i=0}^6 c_i^j \frac{(t-t_0)^{iq}}{i!q^i} \quad (11)$$

式中: x 、 y 、 z 为系统变量; a 、 b 、 c 、 k 、 h 、 q 为系统参数, $a = 10$, $b = 40$, $c = 2.5$, $k = 1$, $h = 4$, $q = 0.9$. 对上述 Adomian 分解下的分数阶 Liu 系统进行数值仿真,即可得出式(1)系统的混沌轨迹,如图 1 所示.

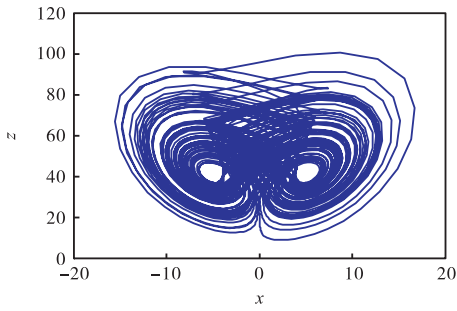
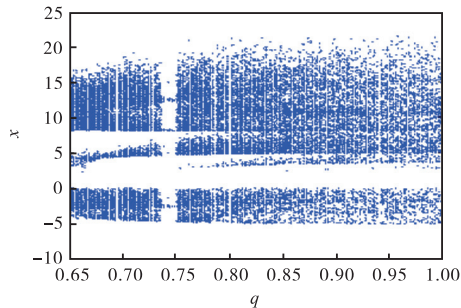


图1 式(1)系统的轨迹图
Fig. 1 Phase portrait of system (1)

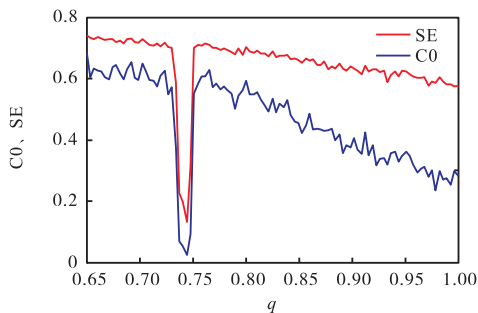
2 系统的分岔图与复杂度

2.1 参数 q 的变化

分析了系统阶数 q 以及内部参数 a, b, c 对分数阶临界混沌系统的分岔图和复杂度^[16]的影响. 首先, 固定内部参数, 改变 $q \in [0.65, 1]$, 从图 2(a) 的系统分岔图可看出, 系统在此区间处于混沌态; 从图 2(b) 的复杂度 SE 和 C0 可以看出, 随着阶数 q 增大, 系统的复杂度在逐渐减小.



(a) 分岔图



(b) 复杂度 SE 和 C0

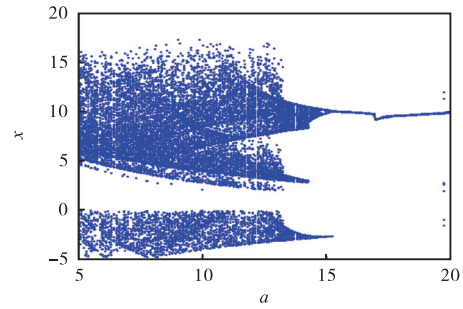
图2 参数 q 变化时式(1)系统的分岔图和复杂度

Fig. 2 Bifurcation diagram and complexity of system (1) with parameter q

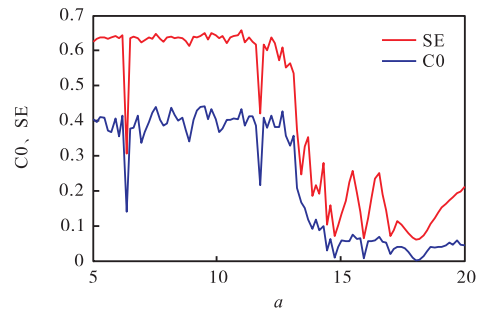
2.2 参数 a 的变化

令 $q = 0.9$, $a \in [5, 20]$, 改变参数 a 时系统的分岔图、复杂度 SE 和 C0 如图 3 所示. 由图 3 可知: 分数阶 Liu 系统以倍周期分岔进入混沌, 即随着参数 a 逐

步减小, 系统是通过倍周期方式进入混沌态; $a \in [5, 14.7)$ 属于混沌状态, 此时系统的复杂度 SE 相对值较大(0.6 左右), 复杂度 C0 相对值也较大(0.4 左右), 总体此区间系统的复杂度较高; $a \in [14.7, 20]$ 属于周期状态, 此区间内分岔图数据点比较稀疏且成线状出现, 此时系统的复杂度 SE 处于 0.1 左右, 复杂度 C0 处于 0.05 左右, 系统复杂度相对较低.



(a) 分岔图



(b) 复杂度 SE 和 C0

图3 参数 a 变化时式(1)系统的分岔图和复杂度

Fig. 3 Bifurcation diagram and complexity of system (1) with parameter a

为了验证上述分岔图与复杂度的正确性, 采用相图法对具体参数下的相图进行数值仿真, 结果见图 4, 图 4(a) 为混沌态, 图 4(b) 为多周期态, 图 4(c) 为双周期态, 图 4(d) 为单周期态.

2.3 参数 b 的变化

令 $q = 0.9$, $b \in [0, 60]$, 改变参数 b 时式(1)系统的分岔图和复杂度如图 5 所示. 由图 5 可知: 系统是以拟周期的行为进入混沌态; $b \in [0, 6]$ 时系统属于非混沌状态, 此时分数阶 Liu 系统的复杂度 SE 为 0.38 ~ 0.6, 复杂度 C0 接近 0; $b \in (6, 60]$ 时系统处于混沌状态, 此区间对应的复杂度 SE 都处于 0.6 左右, 从分岔图可以看出 $b \in (10, 20)$ 有隔离带, 即阵发混沌态, 相应点的复杂度值也较小. 从分岔图与复杂度 SE 可以看出, 周期态部分存在差异, 但复杂度 C0 一致, 从而说明三者是相互补充的. 对于参数 b 具体值时的系统相图, 由于篇幅有限, 不再给出.

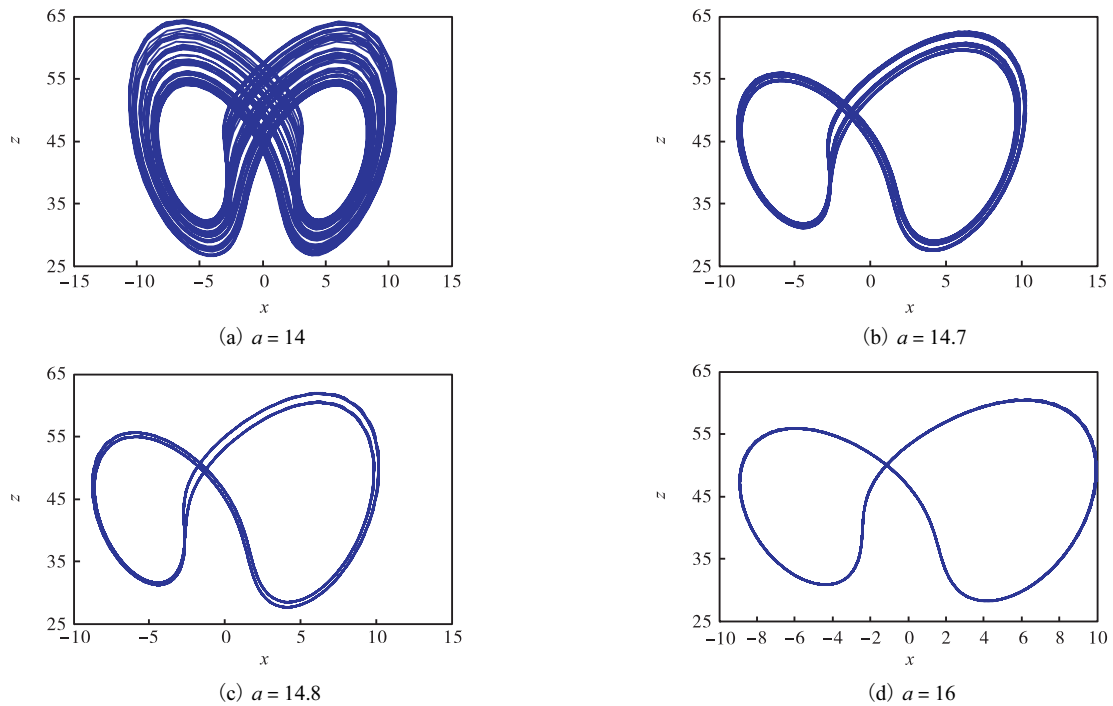


图4 式(1)系统在参数 a 取不同值时的相轨迹图
 Fig. 4 Phase portrait of system (1) with different parameter a

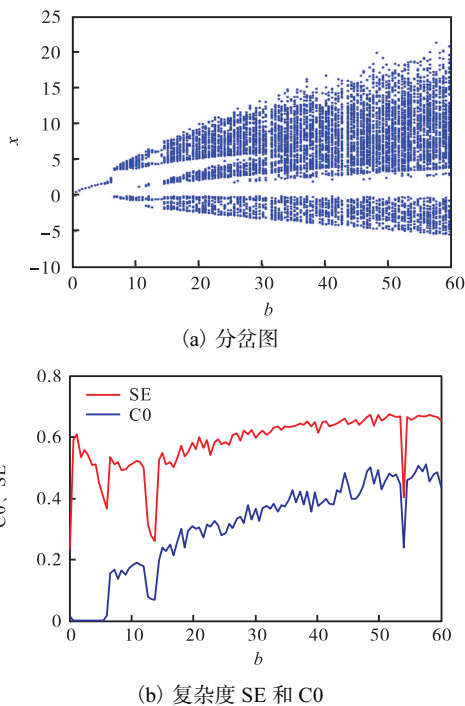


图5 参数 b 变化时式(1)系统的分岔图与复杂度
 Fig. 5 Bifurcation diagram and complexity of system (1) with different parameter b

2.4 参数 c 的变化

令 $q = 0.9$, $c \in [1, 10]$, 改变参数 c 时式(1)系统的分岔图和复杂度见图6. 由图6可知: 此时系统是以倍周期分岔方式脱离混沌, 与参数 a 变化时的方式相似. $c \in [8, 10]$ 时, 系统属于周期状态, 可以明显观察

出分岔点的参数值范围, 此时系统的复杂度 SE 和 C0 均较低; $c \in (1, 8]$ 时, 系统属于混沌状态, 复杂度 SE 较高(取值范围为 $0 \sim 1$), $c = 6$ 左右时分岔图存在明显的隔离, 相应的复杂度值也较小. 系统的相图在参数 c 变化时的仿真结果与参数 a 相似, 本文没有给出.

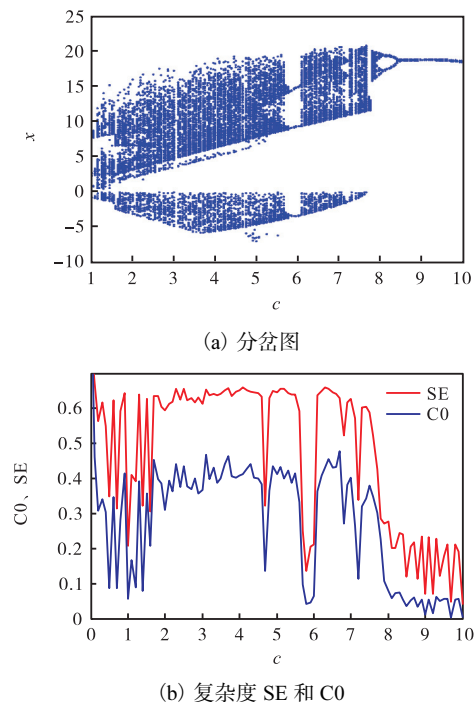


图6 参数 c 变化时式(1)系统的分岔图和复杂度
 Fig. 6 Bifurcation diagram and complexity of system (1) with different parameter c

3 系统的分岔空间

式(1)系统在双参数变化下的复杂度 SE 见图

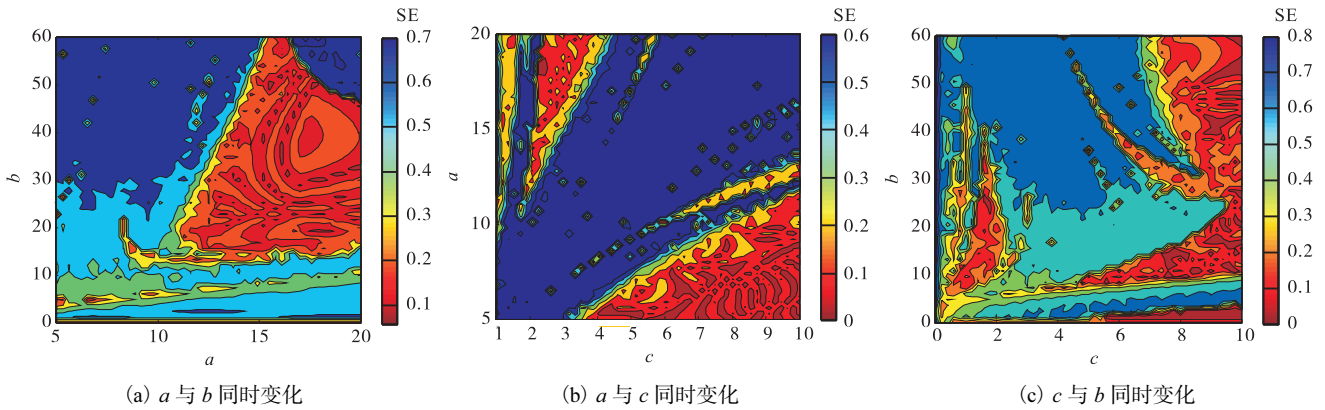


图7 双参数变化时式(1)系统的复杂度 SE

Fig. 7 Bifurcation space of system (1)

4 系统的数字实现

通常采用模拟电路搭建和实现混沌系统. 与模拟电路相比,数字电路抗干扰能力强,随着数字电路技术的发展,利用数字电路实现混沌系统特别是分数阶混沌电路更有实际意义. 数字信号处理芯片(DSP)采用 TI 公司的 TMS320F28335,数模转换芯片采用 DAC8552, TMS320F28335 与 PC 间采用串口通信. TMS320F28335 为浮点 DSP 控制器,主频为 150 MHz,精度高,运算快,可满足复杂算法的运算需要. 离散数据通过基本 Adomian 分解法产生,然后将离散值通过 DMA (direct memory access) 传输给数模转换芯片. 具体 DSP 硬件框架图见图 8,系统硬件电路采用 TMS320F28335 最小系统板(研旭最小系统板)搭建.

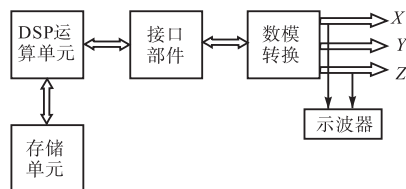


图8 DSP硬件框架图

Fig. 8 DSP hardware framework diagram

将 DSP 产生的混沌序列值先取小数点后 4 位,且对于初值后的一段序列采用丢弃法,即取 3 000 ~ 15 000 区间的序列,用示波器观察到的系统吸引子见图 9.

7. 从图 7 可以看出:系统分岔空间与单参数变化对系统的影响具有一致性,即图 7 与图 3、图 5、图 6 具有一致性. 参数 a 与 c 同时变化,系统出现的混沌态较大,当然复杂度也较高,如图 7(b)所示.

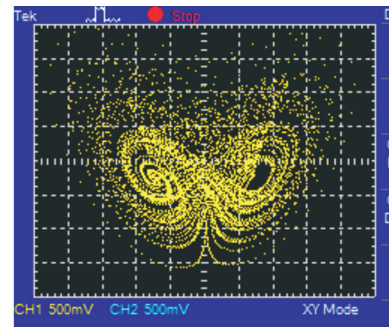


图9 示波器观察的系统吸引子

Fig. 9 System attractor observed by oscilloscope

5 结语

本文运用 Adomian 分解法,从数值仿真方面分析一类经典的分数阶 Liu 系统丰富的动力学行为,且根据参数 q 的特点得出,随着分数阶的增大,系统复杂度减小. 采用数字芯片 DSP 实现分数阶 Liu 混沌系统,进一步说明系统的存在性与可实现性,同时也从一定意义上为分数阶 Liu 混沌系统的应用奠定了基础.

参考文献:

[1] Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics [M]. New Jersey: World Scientific, 2001.
 [2] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. New York: Freeman, 1983.
 [3] Lu J G. Nonlinear observer design to synchronize frac-

- tional-order chaotic system via a scalar transmitted signal[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2006, 359: 107–118.
- [4] 王震, 孙卫. 分数阶 Chen 混沌系统同步及 Multisim 电路仿真[J]. *计算机工程与科学*, 2012, 34(1): 187–192.
- [5] Wu X J, Li J, Chen G R. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2008, 35(4): 392–401.
- [6] Li C P, Deng W H. Remarks on fractions derivatives[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 187(2): 777–784.
- [7] 贾红艳, 陈增强, 薛薇. 分数阶 Lorenz 系统的分析及电路实现[J]. *物理学报*, 2013, 62(14): 56–62.
- [8] 薛薇, 肖慧, 徐进康, 等. 一个分数阶超混沌系统及其在图像加密中的应用[J]. *天津科技大学学报*, 2015, 30(5): 67–71.
- [9] 陈恒, 雷腾飞, 王震, 等. 分数阶 Lorenz 超混沌系统的动力学分析与电路设计[J]. *河南师范大学学报: 自然科学版*, 2016, 44(1): 59–63.
- [10] 杨叶红, 肖剑, 马珍珍. 一个新分数阶混沌系统的同步和控制[J]. *山东大学学报: 理学版*, 2014, 49(2): 76–83.
- [11] 雷腾飞, 胡庆玲, 尹劲松, 等. 基于 Adomian 分解法的分数阶 Chen 混沌系统的动力学分析与 DSP 实现[J]. *曲阜师范大学学报: 自然科学版*, 2016, 42(3): 76–82.
- [12] 陈恒, 雷腾飞, 尹劲松. 基于 Adomian 分解法的分数阶 LV 混沌系统的动力学分析与数字实现[J]. *河南师范大学学报: 自然科学版*, 2016, 44(6): 78–83.
- [13] 廖晓峰, 陈勇. 混沌密码学原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [14] Wang Z, Lei T F, Xi X J, et al. Fractional control and generalized synchronization for a nonlinear electromechanical chaotic system and its circuit simulation with Multisim[J]. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 2016, 24(3): 1502–1515.
- [15] Liu C X, Liu T, Liu L, et al. A new chaotic attractor[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(5): 1031–1038.
- [16] He S B, Sun K H, Mei X Y. Numerical analysis of a fractional-order chaotic system based on conformable fractional-order derivative[J]. *European Physical Journal Plus*, 2017, 132(1): 36-1–36-11.

责任编辑: 常涛

(上接第 67 页)

- Comet[C]//Proceedings of the XSEDE16 Conference on Diversity, Big Data, and Science at Scale. New York, USA: ACM, 2016: 23.
- [8] Fernique P, Durand D, Boch T, et al. HEALPix based cross-correlation in astronomy[C]//Proceedings of Astronomical Data Analysis Software and Systems XXII. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2013: 135–138.
- [9] Fernique P, Oberto A, Boch T, et al. Another way to explore the sky: Healpix usage in aladin full sky mode [C]//Proceedings of Astronomical Data Analysis Software and Systems XIX. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2010: 163–170.
- [10] Fernique P, Allen M G, Boch T, et al. Hierarchical progressive surveys. Multi-resolution HEALPix data structures for astronomical images, catalogues, and 3-dimensional data cubes[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2015, 578: A114.
- [11] Fernique P, Boch T, Donaldson T, et al. MOC-HEALPix Multi-Order Coverage map Version 1.0[EB/OL]. IVOA Applications Working Group, (2014–06–02). <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1505/1505.02937.pdf>
- [12] Górski K M, Hivon E, Banday A J, et al. HEALPix: A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere[J]. *The Astrophysical Journal*, 2005, 622(2): 759–771.
- [13] Karau H, Konwinski A, Wendell P, et al. Learning Spark: Lightning-Fast Big Data Analysis[M]. Sebastopol, USA: O'Reilly Media, Inc, 2015.

责任编辑: 常涛