第 22 卷 第 4 期
2007 年 12 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.22 No. 4
Dec. 2007

矢量值序列空间 l_p（X）中性质的稳定性

于非非
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘　要：随着向量测度理论的迅速发展，由于核空间及 Schauder 分解理论研究的需要，引进了矢量值序列空间. 论证了点态性质端点及 LUR 点从 Banach 空间 X 到矢量值序列空间 $l_p(X)$ 的稳定性，得到了 $l_p(X)$ $(1 < p < +\infty)$ 关于严格凸及 LUR 性质稳定的结论.

关键词：矢量值序列空间 $l_p(X)$；稳定；端点；LUR 点
中图分类号：O177　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6510（2007）04-0079-03

The Stability of Properties in Vector-valued Sequence Spaces $l_p(X)$

YU Fei-fei
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

Abstract：The vector-valued sequence spaces were introduced with the rapid development of the vector measure theory, and for the need of the nuclear spaces and Schauder resolution theory. It was discussed that the point-wise properties—extreme points and LUR points belong to Banach space X and vector-valued sequence spaces $l_p(X)$，the conclusions were obtained that the strictly convex and LUR properties are stable in $l_p(X)$ whenever $1 < p < +\infty$.

Keywords：vector-valued sequence spaces $l_p(X)$；stable；extreme points；LUR points

1977 年，Diestel 和 Vhi 写了 *Vector Measures* 一书，对向量测度、RNP 及 Banach 空间理论的许多方面作了很好的阐述. 近几十年来，向量测度理论发展迅速，由于核空间及 Schauder 分解理论研究的需要，引进了矢值序列空间，许多数学工作者对矢量值序列空间性质进行了多方面的探讨，取得了大量的研究成果[1].

1989 年，刘郁强对 Cesaro 矢值序列空间进行了细致探讨[2]；1999 年，冯国臣、任丽伟给出了矢量值序列空间 $SS(E)$ 端点的等价条件，讨论了 $SS(E)$ 的一致 $\lambda-$性质[3]；2002 年，李秋丽等人刻划了 Cesaro 矢值序列空间的端点和局部一致凸点，并给出了它们的判据[4]；2004 年，冯国臣、任丽伟刻划了矢值序列空间 $SS(E)$ 的局部完全 $k-$凸性，证明了若 $SS(E)$ 是局部一致凸的，则 $SS(E)$ 是局部完全 $k-$凸的，当且仅当 E 是局部完全 $k-$凸的[5]；2005 年，任丽伟、冯国臣刻划了赋序列范数的矢值 Banach 序列空间 $SS(E)$ 的强暴露性与暴露性，给出了判据[6].

设 X 表示 Banach 空间，$S(X)$ 及 $B(X)$ 分别表示 X 的单位球面及单位球. $1 < p < +\infty$ 时，矢量值序列空间定义如下

$$l_p(X) = \left\{ x = (x(i)) \mid x(i) \in X, \sum_{i=1}^{\infty} \|x(i)\|_X^p < +\infty \right\}.$$

在其中规定范数

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|x(i)\|_X^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

在该范数意义下 $l_p(X)$ 成为 Banach 空间.

$x \in S(X)$ 称为 $B(X)$ 的 LUR 点，若对于任意的 $x_n \in X$，$\|x_n\| \to 1$ 且 $\|x_n + x\| \to 2$，均有 $\|x_n - x\| \to 0$.

称性质 P 关于 $l_p(X)$ 是稳定的，如果 X 具有性质 P，则 $l_p(X)$ 也具有性质 P. 对 $l_p(X)$ 性质稳定性的讨论在有助于探讨 $l_p(X)$ 本身性质的同时，对核空间研究及 Schauder 分解理论也颇具理论指导意义.

收稿日期：2007-05-09
作者简介：于非非（1975—），女，吉林农安人，讲师，硕士.

本文论证了点态性质端点及 LUR 点在 $l_p(X)$ $(1<p<+\infty)$ 中的稳定性，同时说明了 $l_p(X)$ $(1<p<+\infty)$ 对严格凸及 LUR 是稳定的.

定理 1 设

$$l_p(X)=\left\{x=(x(i))\mid x(i)\in X,\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_X^p\right]^{\frac{1}{p}},1<p<+\infty\right\}$$

对 $x\in S(l_p(X))$，若存在 $i_0\in\mathbf{N}$，使 $x(i_0)$ 是 X 的端点，则 x 是 $l_p(X)$ 的端点.

证明： 若 $x=(x(1),x(2),\cdots)$ 不是 $B(l_p(X))$ 的端点，则存在 $y,z\in S(l_p(X))$，使 $y+z=2x$ 且 $y\neq z$，即存在 $i_1\in\mathbf{N}$，使 $y(i_1)\neq z(i_1)$，显然 $i_1\neq i_0$．事实上，若 $i_1=i_0$，有 $2x(i_0)=y(i_0)+z(i_0)$，又已知 $x(i_0)$ 是 $B(X)$ 的端点，于是 $i_1\neq i_0$，从而 $x(i_1)=\dfrac{y(i_1)+z(i_1)}{2}$ 一定不是 X 的端点，于是当然有

$$\|x(i_1)\|_X<\frac{1}{2}\left(\|y(i_1)\|_X+\|z(i_1)\|_X\right)$$

$$\|x\|^p=\sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_X^p=\sum_{i\neq i_1}\left\|\frac{y(i)+z(i)}{2}\right\|_X^p+$$
$$\left\|\frac{y(i_1)+z(i_1)}{2}\right\|_X^p<\sum_{i\neq i_1}\frac{1}{2}\left[\|y(i)\|_X^p+\|z(i)\|_X^p\right]+$$
$$\frac{1}{2}\left[\|y(i_1)\|_X^p+\|z(i_1)\|_X^p\right]=$$
$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\|y(i)\|_X^p+\sum_{i=1}^{\infty}\|z(i)\|_X^p\right]=$$
$$\frac{1}{2}\left(\|y\|+\|z\|\right)=1$$

矛盾，从而 $y=z=x$，于是 x 是 $B(l_p(X))$ 的端点.

推论 1 $l_p(X)$ $(1<p<+\infty)$ 对严格凸是稳定的.

定理 2 当 $1<p<+\infty$ 时，对 $x=\{x(i)\}_{i=1}^{\infty}\in S(l_p(X))$，若 $\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_X}$ 是 X 的 LUR 点，则 x 是 $l_p(X)$ 的 LUR 点.

证明： 首先说明在 LUR 点定义中，可以将"$\{x_n\}\subset X,\ \|x_n\|\to1$"替换为"$\{x_n\}\subset S(X)$"．事实上，对于 $\{x_n\}\subset X,\ \|x_n\|\to1$ 且 $\|x_n+x\|\to2(n\to\infty)$，令 $y_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$，则 $\{y_n\}\subset S(X)$，而且

$$\|y_n+x\|=\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}+x\right\|=\frac{1}{\|x_n\|}\left\|x_n+\|x_n\|x\right\|\to2\,(n\to\infty)$$

当然有

$$\|y_n-x\|=\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-x\right\|\to0\,(n\to\infty)$$

进而

$$\left\|x_n-\|x_n\|x\right\|\to0(n\to\infty)$$

于是

$$\|x_n-x\|=\|x_n\|\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{x}{\|x_n\|}\right\|=\|x_n\|\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-x+x-\frac{x}{\|x_n\|}\right\|\leqslant$$
$$\|x_n\|\left[\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-x\right\|+\|x\|(1-\frac{1}{\|x_n\|})\right]\to0\ (\ n\to\infty\ )$$

这就证明了 $\|x_n-x\|\to0(n\to\infty)$.

设 $\{x_n\}\subset S(l_p(X))$ 且 $\|x_n+x\|\to2\ (n\to\infty)$，则由 Minkowski 不等式有

$$2=\lim_{n\to\infty}\|x_n+x\|=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\|x_n(i)+x(i)\|_X^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty}\|x_n(i)\|_X^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_X^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\|x_n\|+\|x\|\right]=2$$

又 $\{\|x_n(i)\|\}_{i=1}^{\infty}$ 及 $\{\|x(i)\|\}_{i=1}^{\infty}\subset S(l_p)$，而且由上面的推导可以得到

$$\left\|\|x_n(i)\|_X+\|x(i)\|_X\right\|_{l_p}\to2\ (n\to\infty)$$

又 l_p $(1<p<+\infty)$ 是一致凸空间，从而有

$$\{\|x_n(i)\|_X\}\xrightarrow{l_p}\{\|x(i)\|_X\}\ (n\to\infty)$$

即 $$\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|\|x_n(i)\|_X-\|x(i)\|_X\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\to0\ (n\to\infty)$$

从而易得

$$\|x_n(i)\|_X\to\|x(i)\|_X\ \ (n\to\infty,\ i=1,\ 2,\cdots)\qquad(*)$$

又

$$4=\lim_{n\to\infty}\left[\|5x_n+5x\|-\|2x+2x_n\|-\|2x_n\|\right]\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\|5x_n+5x\|-\|2x+2x_n+2x_n\|\right]\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\|3x+x_n\|\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|2\|x(i)\|_X+\|x(i)\|_X+\|x_n(i)\|_X\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\left\|2\|x(i)\|_X+\|x(i)+x_n(i)\|_X\right\|_{l_p}\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[2\|x\|+\|x+x_n\|\right]=4$$

从而得到

$$\lim_{x\to\infty}\left\|\|x(i)\|_X+\frac{1}{2}\|x(i)+x_n(i)\|_X\right\|_{l_p}=2$$

又由于

$$\{\|x(i)\|_X\}=\left(\|x(1)\|_X,\|x(2)\|_X,\cdots,\|x(i)\|_X,\cdots\right)\in S(l_p),$$

$$\frac{1}{2}\|x(i)+x_n(i)\|_X=\left(\frac{1}{2}\|x(1)+x_n(1)\|_X,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\|x(2)+x_n(2)\|_X,\cdots,\frac{1}{2}\|x(i)+x_n(i)\|_X,\cdots\right)\in B(l_p)$$

结合 $l_p(1<p<+\infty)$ 的一致凸性，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\|x(i)\|_X-\frac{\|x(i)+x_n(i)\|_X}{2}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}=0$$

于是

$$\|x_n(i)+x(i)\|_X\to 2\|x(i)\|_X\ (n\to\infty)$$

结合(*)式，有

$$\left\|\frac{x_n(i)}{\|x_n(i)\|_X}+\frac{x(i)}{\|x(i)\|_X}\right\|\to 2\ (n\to\infty)$$

又已知 $\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|}$ $(i=1,2,\cdots)$ 是 X 的 LUR 点，从而有

$$\frac{x_n(i)}{\|x_n(i)\|_X}\to\frac{x(i)}{\|x(i)\|_X}\ (i=1,2,\cdots,\ n\to\infty)$$

于是结合 $x_n(i)\to x(i)$ $(i=1,2,\cdots,\ n\to\infty)$，容易得到 $\|x_n-x\|\to 0$，即 x 是 $l_p(X)$ 的 LUR 点.

推论 2　$l_p(X)$ $(1<p<+\infty)$ 对 LUR 是稳定的.

参　考　文　献:

［1］ 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海：华东师范大学出版社，1986：121—186.

［2］ 刘郁强. 关于 Cesaro 矢值序列空间[J]. 数学杂志，1989，9（3）：253—260.

［3］ 武俊德，郭静贞. 矢值序列空间 $l^1(X)$ 对局部凸空间 (X,T) 拓扑性质的刻划[J]. 大庆石油学院学报，1992，16（2）：90—92.

［4］ 卜庆营，刘庆吉，任丽伟. 矢值序列空间 $BMC(X)$ 中的序列紧集[J]. 哈尔滨工业大学学报，1995，27（4）：12—14.

［5］ 冯国臣，任丽伟. Cesaro 矢值序列空间的(M)性质和一致 $\lambda-$ 性质[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报，2003，19（5）：1—3.

［6］ 任丽伟，冯国臣. 赋序列范数的矢值序列空间 $SS(E)$ 的强暴露性与暴露性[J]. 应用泛函分析学报，2005，7（3）：198—202.