第 22 卷 第 4 期
2007 年 12 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.22 No. 4
Dec. 2007

Cobb-Douglas 函数模型参数估计方法的研究

王玉杰，张大克
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘　要：根据 LS 估计理论，对目前 Cobb-Douglas 函数模型参数估计方法存在的问题进行了分析．通过方差稳定化变换建立了新的参数估计模型，新模型基本满足 Gauss-Markov 假定，保持了 LS 估计的优良性质.

关键词：Cobb-Douglas 函数模型；LS 估计；Gauss-Markov 假定；方差稳定化变换

中图分类号：O212. 1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6510（2007）04-0075-04

Study of the Parameter Estimation Method for the Cobb-Douglas Function Model

WANG Yu-jie，ZHANG Da-ke
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

Abstract：According to the theory of Least-Square estimation，we analyze the problems existing in parameter estimation method for the Cobb-Douglas function model. The new model of parameter estimation is established by variance-smoothing transformation. The new model satisfies the Gauss-Markov hypothesis and possesses the good qualities of Least-Square estimation.

Keywords：Cobb-Douglas function model；Least-Square estimation；Gauss-Markov hypothesis；variance-smoothing transformation

1 Cobb-Douglas 函数模型参数估计方法存在的问题

Cobb-Douglas 函数是研究投入与产出关系的著名函数，有着非常广泛的应用，常常在回归分析中作为回归函数来描述投入与产出间的相关关系，它对于确定在既定生产条件下生产要素的合理投入数量和配合比例，提高资源的利用率，获取更大的经济效益起着重要的作用. 因此，在回归分析中精确地估计 Cobb-Douglas 函数模型的参数，使之能更可靠地描述生产中投入与产出间的相关关系是一个极其重要的问题.

Cobb-Douglas 函数模型的一般形式为

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} \qquad (1)$$

其中：y 为产出的数量；x_i 为生产要素投入的数量，$i = 1, 2, \cdots, m$；α_j 为参数，$j = 0, 1, \cdots, m$. 设在某一生产过程中 y 为不可控制的随机变量，而 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为可严格控制的非随机变量，则变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 与 y 间的相关关系可描述为

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} + e \qquad (2)$$

其中：e 为随机误差，且 $E(e) = 0$. 为了估计模型（2）中的未知参数 α_j（$j = 0, 1, \cdots, m$）进行 n 次独立试验，设观测值为

$$(x_{1l}, x_{2l}, \cdots, x_{ml}, y_l) \quad l = 1, 2, \cdots, n \qquad (3)$$

则对模型（2）中未知参数进行估计的回归模型为

$$y_l = \alpha_0 x_{1l}^{\alpha_1} x_{2l}^{\alpha_2} \cdots x_{ml}^{\alpha_m} + e_l \quad l = 1, 2, \cdots, n \qquad (4)$$

其中：观测值 y_l 服从区间 $(0, +\infty)$ 上的正态截尾分布，e_l 为第 l 次观测的随机误差，它服从正态分布，且 $E(y_l) = \alpha_0 x_{1l}^{\alpha_1} x_{2l}^{\alpha_2} \cdots x_{ml}^{\alpha_m}$，$E(e_l) = 0$，$l = 1, 2, \cdots, n$；$\mathrm{Cov}(y_s, y_t) = \begin{cases} \sigma^2 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$，$\mathrm{Cov}(e_s, e_t) = \begin{cases} \sigma^2 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$，$s, t = 1, 2, \cdots, n$.

收稿日期：2007-06-19
基金项目：天津科技大学引进人才科研启动基金资助项目（20030402）
作者简介：王玉杰（1962—），女，吉林镇赉人，教授.

严格地讲，模型（4）属于非线性回归模型，其参数的估计需要采用非线性 LS 估计[1,2]. 但非线性 LS 估计属于数值计算，方法复杂，且很难保证迭代结果为全局最优，因此很少有人用模型（4）对模型（2）中的未知参数进行估计. 目前普遍使用的方法是对模型（1）进行对数变换，然后用线性回归模型

$$Y_l = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{il} + \varepsilon_l \quad l = 1,2,\cdots,n \qquad (5)$$

对模型（2）中的未知参数进行估计，其中 $Y_l = \lg(y_l)$，$X_{il} = \lg(x_{il})$，ε_l 为第 l 次观测的随机误差，$i = 1,2,\cdots,m$，$l = 1,2,\cdots,n$. 运用线性 LS 估计的方法对模型（5）中的参数进行估计[3−5]，获得参数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的线性 LS 估计 $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_m$，并将其作为模型（2）中未知参数的估计. 这种参数估计方法存在的问题：

（1）在用模型（5）进行参数估计时，虽然当 y_l 服从区间 $(0,+\infty)$ 上的正态截尾分布时，$Y_l = \lg(y_l)$ 的数学期望存在，但 Y_l 的数学期望并不是 $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{il}$，$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{il}$ 只是 Y_l 数学期望的近似值，ε_l 的数学期望只是近似等于零，$l = 1,2,\cdots,n$.

（2）在用模型（5）进行参数估计时，虽然当 y_l（$l = 1,2,\cdots,n$）服从区间 $(0,+\infty)$ 上的正态截尾分布时，$Y_l = \lg(y_l)$（$l = 1,2,\cdots,n$）的方差存在，且 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立，但 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 的方差一般不完全相等，即线性回归模型（5）不满足 Gauss-Markov 假定[3,4].

证明：（1）服从区间 $(0,+\infty)$ 上正态截尾分布的 y_l 的概率密度函数为

$$f_l(x) = \frac{1}{(1-q)v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2v^2}}$$
$$x > 0,\ v > 0,\ 0 < q < 1$$
$$l = 1,2,\cdots,n$$

因为若反常积分 $\int_0^\infty \lg(x) f_l(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $E(Y_l)$ 存在，且 $E(Y_l) = \int_0^\infty \lg(x) f_l(x) \mathrm{d}x$. 而

$$\int_0^\infty \left|\lg(x) f_l(x)\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 10} \int_0^1 -\ln(x) f_l(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{\ln 10} \int_1^\infty \ln(x) f_l(x) \mathrm{d}x$$

当 $x \in [1, \infty)$ 时

$$\lim_{x\to\infty} [x^2 \ln(x) f_l(x)] = \frac{1}{(1-q)v\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to\infty} [x^2 \ln(x) e^{-\frac{(x-u)^2}{2v^2}}] = 0$$

根据无穷积分敛散性的判别法[6]知，无穷积分 $\frac{1}{\ln 10} \int_1^\infty \ln(x) f_l(x) \mathrm{d}x$ 收敛.

当 $x \in (0, 1]$ 时

$$\lim_{x\to 0^+} [-x^{\frac{1}{2}} \ln(x) f_l(x)] = \frac{1}{-(1-q)v\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to 0^+} [x^{\frac{1}{2}} \ln(x) e^{-\frac{(x-u)^2}{2v^2}}] = 0$$

根据瑕积分敛散性的判别法[6]知，瑕积分 $\frac{1}{\ln 10} \int_0^1 -\ln(x) f_l(x) \mathrm{d}x$ 收敛. 因此反常积分 $\int_0^\infty \lg(x) f_l(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛，$Y_l = \lg(y_l)$ 的数学期望存在，且 $E(Y_l) = \int_0^\infty \lg(x) f_l(x) \mathrm{d}x$，$l = 1,2,\cdots,n$.

记 $y_l^* = E(y_l) = \alpha_0 x_{1l}^{\alpha_1} x_{2l}^{\alpha_2} \cdots x_{ml}^{\alpha_m}$（$l = 1,2,\cdots,n$），将 $Y_l = \lg(y_l)$ 在 y_l^* 附近作 Taylor 展开，并只取到一次项得

$$Y_l = \lg(y_l) \approx \lg(y_l^*) + \lg'(y_l^*)(y_l - y_l^*)$$
$$l = 1,2,\cdots,n$$

则

$$E(Y_l) \approx \lg(y_l^*) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lg(x_{il}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{il}$$
$$l = 1,2,\cdots,n$$

因此 Y_l 的数学期望并不是 $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{il}$，$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{il}$ 只是 Y_l 数学期望的近似值，ε_l 的数学期望只是近似等于零，$l = 1,2,\cdots,n$.

（2）因为若反常积分 $\int_0^\infty [\lg(x)]^2 f_l(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $E(Y_l^2)$ 存在，且 $E(Y_l^2) = \int_0^\infty [\lg(x)]^2 f_l(x) \mathrm{d}x$. 而

$$\int_0^\infty \left|[\lg(x)]^2 f_l(x)\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(\ln 10)^2} \int_0^1 [\ln(x)]^2 f_l(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{(\ln 10)^2} \int_1^\infty [\ln(x)]^2 f_l(x) \mathrm{d}x$$

当 $x \in [1, \infty)$ 时

$$\lim_{x\to\infty} \{x^2 [\ln(x)]^2 f_l(x)\} = \frac{1}{(1-q)v\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to\infty} \{x^2 [\ln(x)]^2 e^{-\frac{(x-u)^2}{2v^2}}\} = 0$$

根据无穷积分敛散性的判别法知，无穷积分 $\frac{1}{(\ln 10)^2} \int_1^\infty [\ln(x)]^2 f_l(x) \mathrm{d}x$ 收敛.

当 $x \in (0, 1]$ 时

$$\lim_{x\to 0^+} \{x^{\frac{1}{2}} [\ln(x)]^2 f_l(x)\} =$$

$$\frac{1}{(1-q)v\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to 0^+}\{x^{\frac{1}{2}}[\ln(x)]^2 e^{-\frac{(x-u)^2}{2v^2}}\}=0$$

根据瑕积分敛散性的判别法知，瑕积分 $\frac{1}{[\ln 10]^2}\int_0^1[\ln(x)]^2 f_l(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 因此反常积分 $\int_0^\infty[\lg(x)]^2 f_l(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，$E(Y_l^2)$ 存在. 由于 $E(Y_l)$ 和 $E(Y_l^2)$ 都存在，所以 $Y_l=\lg(y_l)$（$l=1,2,\cdots,n$）的方差存在.

因为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 相互独立，且 $Y_l=\lg(y_l)$（$l=1,2,\cdots,n$），所以 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 也相互独立，互不相关. 但是由于变换函数 $y=\lg(x)$ 的导数不是常数，而模型（4）中的 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 具有相同的方差，故经过函数 $y=\lg(x)$ 变换后，模型（5）中的 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 一般不具有相同的方差，即线性回归模型（5）不满足 Gauss-Markov 假定.

线性回归模型（5）存在的两个问题可能导致其线性 LS 估计的结果是劣的，不具有方差一致最小性，参数估计的精度降低了[7-9].

2　新参数估计方法

模型（5）的矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\alpha}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{m1}\\1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{m2}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_n\end{bmatrix}$$

当模型（6）中矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $rank\ (\boldsymbol{X})=m+1$, $n>m+1$ 时，模型（6）中未知参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的线性 LS 估计为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} \tag{7}$$

根据前面对模型（5）存在问题的讨论知，估计（7）不具有方差一致最小性，参数估计的精度降低了. 设模型（6）中 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵为

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y})=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2\end{bmatrix}$$

其中 $\sigma_l^2=Var(Y_l)$（$l=1,2,\cdots,n$）均为大于 0 的未知参数，并且不完全相等.

定理 1　当模型（4）中随机误差 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的绝对值都足够小时，模型（6）中 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y})\approx\sigma^2\boldsymbol{G} \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\frac{1}{[y_1\ln 10]^2} & 0 & \cdots & 0\\0 & \frac{1}{[y_2\ln 10]^2} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \frac{1}{[y_n\ln 10]^2}\end{bmatrix} \tag{9}$$

证明： 记 $y_l^*=E(y_l)=\alpha_0 x_{1l}^{\alpha_1}x_{2l}^{\alpha_2}\cdots x_{ml}^{\alpha_m}$ $(l=1,2,\cdots,n)$. 则由模型（5）知

$$\varepsilon_l=Y_l-(\alpha_0+\sum_{i=1}^m\alpha_i X_{il})=\lg(y_l)-\lg(y_l^*)$$
$$l=1,2,\cdots,n$$

又由模型（4）知

$$e_l=y_l-\alpha_0 x_{1l}^{\alpha_1}x_{2l}^{\alpha_2}\cdots x_{ml}^{\alpha_m}=y_l-y_l^*$$
$$l=1,2,\cdots,n$$

因此，当模型（4）中随机误差 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的绝对值都足够小时，有

$$\frac{\varepsilon_l}{e_l}=\frac{\lg(y_l)-\lg(y_l^*)}{y_l-y_l^*}\approx\frac{\mathrm{d}(\lg(y_l))}{\mathrm{d}y_l}=\frac{1}{y_l\ln 10}$$
$$l=1,2,\cdots,n$$

所以

$$\varepsilon_l\approx\frac{1}{y_l\ln 10}e_l\qquad l=1,2,\cdots,n$$

又因为在模型（5）中 $Var(\varepsilon_l)=Var(Y_l)=\sigma_l^2$（$l=1,2,\cdots,n$），而在模型（4）中 $Var(e_l)=\sigma^2$（$l=1,2,\cdots,n$）. 故

$$\sigma_l^2=Var(Y_l)=Var(\varepsilon_l)\approx[\frac{1}{y_l\ln 10}]^2 Var(e_l)=[\frac{1}{y_l\ln 10}]^2\sigma^2$$
$$(l=1,2,\cdots,n)$$

因此，模型（6）中 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵可表示为式（8）.

定理 2　当模型（6）中矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $rank(\boldsymbol{X})=m+1,\ n>m+1$，$\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵可表示为式（8）时，线性回归模型

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X\alpha}+\boldsymbol{\eta} \tag{10}$$

基本满足 Gauss-Markov 假定.

其中

$$\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}y_1\ln 10 & 0 & \cdots & 0\\0 & y_2\ln 10 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & y_n\ln 10\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}\ ,\ \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{11}$$

证明：因为 $\boldsymbol{G}>0$，故存在唯一的 $\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}>0$，使得 $\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{G}^{-1}$，其中

$$\boldsymbol{G}^{-1}=\begin{bmatrix}(y_1\ln 10)^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (y_2\ln 10)^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (y_n\ln 10)^2\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}$，在模型（6）的等号两端同时左乘 $\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}$ 得式（10）．因为 $E(\boldsymbol{\varepsilon})\approx 0$，所以 $E(\boldsymbol{\eta})\approx 0$，并有

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{W})=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\approx\sigma^2\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}=$$

$\sigma^2\boldsymbol{I}_n$，说明模型（6）经过等号两端同时左乘 $\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}$ 的方差稳定化变换后，其方差齐性得到了较好的修正[9—11]，线性回归模型（10）基本满足 Gauss-Markov 假定.

线性回归模型（10）中未知参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的线性 LS 估计为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=((\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X})^T(\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}))^{-1}(\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X})^T\boldsymbol{W}=$$
$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Y} \tag{12}$$

由 Gauss-Markov 定理知，用估计（12）作为模型（2）中未知参数的估计要明显优于用估计（7）作为模型（2）中未知参数的估计，但前提条件是模型（4）中随机误差 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的绝对值都足够小.

参 考 文 献：

［1］王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉：武汉大学出版社，2002：51—81.

［2］袁亚湘，孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京：科学出版社，1997：373—403.

［3］陈希孺，王松桂.近代回归分析[M]. 合肥：安徽教育出版社，1987：8—150.

［4］杨文礼. 线性模型引论[M]. 北京：北京师范大学出版社，1998：35—58.

［5］Rao C R. Estimation of parameters in a linear model [J]. Ann Statist，1976，4：1023—1037.

［6］刘玉琏，傅沛仁. 数学分析讲义：下册[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2001：249—274.

［7］张金魁. 线性模型参数估计及其改进[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1999：6—55.

［8］Andrews O. A robust method for multiple linear regression [J]. Technometrics，1974，16：523—531.

［9］Huehn M. Improvement of the predicted least-squares-estimates in multiple linear regression by means of an examination of residuals [J]. Metrika，1984，31：333—347.

［10］Hubert M H，Wijekoon P. Improvement of the Liu estimator in linear regression model[J]. Statistical Papers，2006，47：471—479.

［11］Gil González-Rodríguez，Ángela Blanco，Norberto Corral. Least squares estimation of linear regression models for convex compact random sets [J]. Advances in Data Analysis and Classification，2007（1）：67—81.