第 22 卷 第 3 期
2007 年 9 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.22 No. 3
Sep. 2007

观察数据用联系数表示的方差分析及应用

王 霞
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘 要：观察数据在一般情况下由观察值和观察误差两部分组成. 因此，可以用联系数作出客观描述，在此基础上给出了一种新的方差分析，比传统方差分析能更细致地分析观察数据的变差和作出显著性检验.

关键词：方差分析；观察数据；不确定性；联系数
中图分类号：O212.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6510（2007）03-0072-04

The Square Difference Analysis and Application Using Connection Number Indicates in Observation Data

WANG Xia
（College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China）

Abstract: The observation data is expressed by connection number. This paper gives out the four fundamental operations of arithmetic of connection number and average operation of arithmetic. This paper also makes up a kind of new square difference analysis model. Using the living example, this paper shows that it can do better in painstaking analysis observation data change difference and producing notable inspection than tradition square difference analysis.

Keywords: square difference analysis; observation data; indefinite; connection number

方差分析是数理统计中的一种基本方法，是根据试验的结果进行分析，鉴别各个有关因素对试验结果影响的有效方法，广泛应用于各种科学试验和观察数据的分析[1].

传统方差分析中用到的观察数据都是以确定值表示的.事实上，由于测量工具和观察方法自身的限制，实际科学研究与试验中得到的观察数据是带有一定程度不确定性的数据，由此想到可以用集对分析中的联系数[2,3]来如实地描述这种观察数据，当观察数据用联系数来表示时，给出了一种新的方差分析模型，这比传统方差分析能更细致地分析观察数据的变差和作出显著性检验.

1 联系数及其基本运算

本文取以下形式的联系数[4]：

$$u = A + Bi \tag{1}$$

其中：$A, B \in R^+$，$i \in [-1,1]$；需要归一化时，可令 $N = A + B$，$a = A/N$，$b = B/N$，则由式(1)可得

$$\mu = a + bi \tag{2}$$

式(1)与式(2)统称为联系数，$A(a)$ 称为同部，$B(b)$ 称为异部. 注意到 i 在区间 $[-1,1]$ 取值的不确定性，所以式(1)与式(2)联系数也称为确定不确定性联系数.

设有两个联系数 $u_1 = A_1 + B_1 i$，$u_2 = A_2 + B_2 i$，则

（1）u_1 与 u_2 两个联系数相等，即 $u_1 = u_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2, B_1 = B_2$.

（2）u_1 与 u_2 的和是一个联系数，记作 $u = u_1 + u_2 = A + Bi$（$A = A_1 + A_2$，$B = B_1 + B_2$）.由此定义知，联系数满足加法交换律与结合律，且可推广到有限个联系数的和.

（3）u_1 与 u_2 的差是一个联系数，记作 $u = u_1 - u_2 = A + Bi$，即 $u_1 = u_2 + A + Bi$，由联系数加法及联系数相等的定义有：$A_1 = A + A_2$，$B_1 = B + B_2$，即 $A = A_1 - A_2$，$B = B_1 - B_2$，两个联系数相减时，同部做减法运算，异部也做减法运算.

（4）u_1 与 u_2 的乘积是一个联系数，记作 $u =$

收稿日期：2006-10-25；**修回日期**：2007-04-27
作者简介：王 霞（1964—），女，辽宁阜新人，教授.

$u_1 \times u_2 = A + Bi$，其中：$A = A_1A_2$，$B = A_1B_2 + A_2B_1 + B_1B_2$．可以推广到有限个联系数的乘积，进而得到联系数乘幂的运算．

（5）u_1 与 u_2 的商是一个联系数，记作 $u = u_1/u_2 = A + Bi$，由乘积及相等定义得 $u_2u = A_2A + (A_2B + AB_2 + B_2B)i = u_1 = A_1 + B_1i$，比较同部和异部，得方程组

$$\begin{cases} A_2A = A_1 \\ A_2B + AB_2 + B_2B = B_1 \end{cases}$$

解此方程组得 $A = A_1/A_2$，$B = (B_1 - \frac{A_1B_2}{A_2})\Big/(A_2 + B_2)$

（6）设有 n 个联系数 $u_1 = A_1 + B_1i$，$u_2 = A_2 + B_2i$，…，$u_n = A_n + B_ni$，则它们的平均数是一个联系数，记作 $u = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)/n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = A + Bi$，其中：$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k$，$B = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} B_k$．

（7）联系数大小比较：设 I 是一个有限区间，若 $i \in I \subseteq [-1,1]$ 时，有 $u_1 - u_2 > 0$，则在 $i \in I \subseteq [-1,1]$ 这个范围内有 $u_1 > u_2$；同理，若 $i \in I \subseteq [-1,1]$ 时，有 $u_1 - u_2 < 0$，则在 $i \in I \subseteq [-1,1]$ 这个范围内有 $u_1 < u_2$；若 $i \in I \subseteq [-1,1]$ 时，有 $u_1 - u_2 = 0$，则在 $i \in I \subseteq [-1,1]$ 这个范围内有 $u_1 = u_2$；0 是特殊的联系数．显然，联系数在比较大小时与 i 的取值有关[5]．

2　观察数据用联系数表示的方差分析

观察数据用联系数表示的方差分析在程序、格式以及显著性检验准则等，都与传统的方差分析基本相同，只是在有关的数学运算中采用了联系数的运算规则[6]．

本文以单因素多水平方差分析为例叙述如下：

（1）把所要考察的因素 A 在给定的范围内划分出 m 个水平 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 等级．

（2）在水平 A_j ($j = 1,2,\cdots,m$) 下，进行 k（$k \geqslant 2$）次独立试验，每次试验所得观察数据用联系数 $\mu_{nl} = a_{nl} + b_{nl}i$ 表示，其中 $n = 1,2,\cdots,m$，$l = 1,2,\cdots,k$．

（3）全部试验所得观察数据 μ_{nl} 记入表 1 所示的单因素方差分析计算表．

表 1　观察数据用联系数表示的单因素方差分析计算表

Tab.1　Individually element square difference analysis using connection number indication in observation data

序号	因素				（Σ）总和
	A_1	A_2	…	A_m	
1	μ_{11}	μ_{21}	…	μ_{m1}	
2	μ_{12}	μ_{22}	…	μ_{m2}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
k	μ_{1k}	μ_{2k}	…	μ_{mk}	
Σ（样本和）	$\sum_{l=1}^{k}\mu_{1l}$	$\sum_{l=1}^{k}\mu_{2l}$	…	$\sum_{l=1}^{k}\mu_{ml}$	$\sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\mu_{nl}$
（Σ）²（和的平方）	$(\sum_{l=1}^{k}\mu_{1l})^2$	$(\sum_{l=1}^{k}\mu_{2l})^2$	…	$(\sum_{l=1}^{k}\mu_{ml})^2$	$\sum_{n=1}^{m}(\sum_{l=1}^{k}\mu_{nl})^2$
Σ²（平方的和）	$\sum_{l=1}^{k}\mu^2_{1l}$	$\sum_{l=1}^{k}\mu^2_{2l}$	…	$\sum_{l=1}^{k}\mu^2_{ml}$	$\sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\mu^2_{nl}$

（4）按联系数运算法则计算表 1 中的各种平方和，并令

$$P = \frac{1}{mk}(\sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\mu_{nl})^2 \tag{3}$$

$$Q = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{m}(\sum_{l=1}^{k}\mu_{nl})^2 \tag{4}$$

$$R = \sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\mu^2_{nl} \tag{5}$$

组间离差平方和

$$S_1 = Q - P \text{（自由度：} m-1\text{）} \tag{6}$$

组内离差平方和

$$S_2 = R - Q \text{（自由度：} m(k-1)\text{）} \tag{7}$$

总平方和

$$S = S_1 + S_2 = R - P \text{（自由度：} mk-1\text{）} \tag{8}$$

（5）写出表 2 所示的方差分析表，并计算 F 值和作 F 检验．

当 $F > F_{0.01}$ 时，认为因素 A 影响特别显著；当 $F_{0.01} \geqslant F > F_{0.05}$ 时，认为因素 A 影响显著；当 $F_{0.05} \geqslant F > F_{0.10}$ 时，认为因素 A 有一定影响；当 $F_{0.10} > F$ 时，认为因素 A 看不出有什么影响．$F_{0.10}$，$F_{0.05}$，$F_{0.01}$ 可以从常用的 F 检验表中查得.与传统方差分析所不同的是，实际计算分析中得到的 F 值，由

于是一个同异型联系数 $A+Bi$,还需要计算 $i=1, i=-1$ 时的 F 值,这样有可能出现被检验因素 A 介于“影响特别显著”与“影响显著”之间,或“影响显著”与“有一定影响”之间,或“有一定影响”与“看不出有什么影响”之间,在这种情况下,如果允许,可以进一步作试验,以获得新的观察数据,再作一次方差分析.

表 2　观察数据用联系数表示的方差分析表

Tab. 2　Square difference analysis using connection number indication in observation data

方差来源	平方和	自由度	均方	F	临界值
组间	S_1	$m-1$	$\overline{S}_1=S_1/(m-1)$	$\overline{S}_1/\overline{S}_2$	$F_\alpha(m, m(k-1))$
组内	S_2	$m(k-1)$	$\overline{S}_2=S_2/m(k-1)$		查表
总和	S	$mk-1$			

3　应用举例

为了便于与传统的方差分析相比较,这里取文献[1]的一个例子作适当补充后来说明观察数据用联系数表示的主要计算结果.

例:为考察温度对某一化工产品得率的影响,选了 5 种不同的温度,且同一温度作了 3 次试验,得观察数据如表 3 所示. 表 3 中带 i 部分数据是观察误差,主要由计算器具的不确定性和观察方式等因素决定,但此处为假设数据.

由表 3 知 $m=5$, $k=3$,根据式(3)—式(8)可得

$$P=\frac{1}{15}(1344+14.4i)^2=120422.4+2594.304i$$

$$Q=\frac{1}{3}(362178+7909.94i)=120726+2636.65i$$

$$R=120776+2645.28i$$

$$S_1=Q-P=(120726+2636.65i)-(120422.4+2594.304i)=303.6+42.35i$$

自由度: $f_1=m-1=4$

$$S_2=R-Q=(120776+2645.28i)-(120726+2636.65i)=50+8.63i$$

自由度: $f_2=m(k-1)=10$

$$S=S_1+S_2=(303.6+42.35i)+(50+8.63i)=353.6+50.98i$$

自由度: $f=mk-1=14$

于是得方差分析表 4. 其中 $F=\overline{S}_1/\overline{S}_2=[\frac{1}{4}(303.6+42.35i)]/[\frac{1}{10}(50+8.63i)]=(75.9+10.95i)/(5+0.863i)=15.18-0.367i$.

表 3　某化工产品在不同温度下的得率及方差分析

Tab. 3　Receive rata and square difference analysis of a certain chemical products in difference temperature

温度/℃	得率/%			Σ	(Σ)^2	Σ^2
	1	2	3			
60	$90+1i$	$92+1.2i$	$88+0.8i$	$270+3i$	$72900+1629i$	$24308+544.68i$
65	$97+1.5i$	$93+1i$	$92+1i$	$282+3.5i$	$79524+1986.25i$	$26522+665.25i$
70	$96+1.5i$	$96+1.5i$	$93+1.2i$	$285+4.2i$	$81225+2411.64i$	$27081+805.14i$
75	$84+0.6i$	$83+0.5i$	$88+0.8i$	$255+1.9i$	$65025+972.61i$	$21689+325.45i$
80	$84+0.6i$	$86+0.8i$	$82+0.4i$	$252+1.8i$	$63504+910.44i$	$21176+304.76i$
			Σ(总和)	$1344+14.4i$	$362178+7909.94i$	$120776+2645.28i$

表 4　用联系数表示的某化工产品在不同温度下的得率方差分析表

Tab. 4　Receive rate square difference analysis of a certain chemical products in difference temperature using connection number indicates

方差来源	平方和	自由度	均方	F
组间(温度)	$303.6+42.35i$	4	$75.9+10.59i$	$15.18-0.367i$
组内(误差)	$50+8.63i$	10	$5+0.863i$	
总和	$353.6+50.98i$	14		

当 $f_1=m-1=4$, $f_2=mk-1=10$ 时查表有 $F_{0.05}(4, 10)=3.5$, $F_{0.01}(4, 10)=6.0$. 现在 $F=15.18-0.367i$,当 $i=1$ 时, $F_{i=1}=15.18-0.367=14.813>6.0$. 当 $i=1$ 时,是 $i\in[-1,1]$ 中 $F=15.18-0.367i$ 的最小值,从而说明温度对该化工产品得率有特别显著的影响,这一结论与文献[1]的结论完全相同. 用联系数对观察数据进行描述,与传统单因素方差分析比较,新方法具有理论上的突破,并经受了实践的检验.

4 结　论

方差分析是数理统计中处理有关随机不确定性的一种有效方法，无论是科研实践还是生产工作实际中，观察数据受到仪器仪表等计量器具不确定性的影响和观察方法的限制而带有一定程度的不确定性是无法避免的，从这个意义上说，把观察数据用联系数 $u = A + Bi$ 表示既合理，也符合客观实际；从测量的意义上说，也符合测量数据的不确定度原理[7]，据此给出的基于联系数的方差分析方法，一方面是对传统方差分析方法的创新，同时也将促进集对分析联系数学的理论和应用研究的发展[8, 9].

参　考　文　献:

［1］ 中国科学院数学研究所统计组. 方差分析[M]. 北京：科学出版社, 1997：1—58.

［2］ 赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州：浙江科学技术出版社, 2000：1—35.

［3］ 赵克勤. 联系数及其应用[J]. 吉林师范学院学报, 1996, 17（8）：50—53.

［4］ 王　霞，彭晓华. 集对分析中联系数的运算及其应用[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2004, 23（2）：275—276.

［5］ 王　霞，彭晓华. 集对分析中联系度系数 i 的取值方法及应用[J]. 天津轻工业学院学报, 2002（4）：56—58.

［6］ 黄德才，赵克勤. 用联系数描述和处理网络计划中的不确定性[J]. 系统工程学报, 1999, 14（2）：112—117.

［7］ 刘智敏. 不确定度原理[M]. 北京：中国计量出版社, 1999：1—4.

［8］ 蒋云良. 基于 SPA 的学生成绩分析[J]. 数理统计与管理, 2003, 22（6）：5—8.

［9］ 郑丕谔，岳成艳. 基于集对论的居民消费研究[J]. 数理统计与管理, 2003, 22（6）：36—40.

（上接第 57 页）

参　考　文　献:

［1］ 顾　燕. 大规模定制模式的综述：概念、原因、分类及实现[J]. 企业经济, 2002（9）：79—80.

［2］ 王　晶, 贾经冬, 宫兆波. 顾客参与生产过程与大规模定制[J]. 北京航空航天大学学报：社会科学版, 2002, 15（14）：38—42.

［3］ Roller D. Advanced method for parametric design[M]// H Hagen, D Roller. Geometric Modeling: Methods and Applications, Berlin: Springer-Verlag, 1991：251—266.

［4］ Lee Y J, Kim K. Geometric reasoning for knowledge-based parametric design using graph representation [J]. Computer -aided Design, 1996, 28：831—841.

［5］ Tanaka K. An introduction to fuzzy logic for practical applications[M]. Translated by T Niimura. New York：Springer, 1997.

［6］ Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8：338—353.

［7］ Zadeh L A. Fuzzy algorithms[J]. Information and Control, 1968, 12：94—102.

［8］ Zadeh L A. Toward a theory of fuzzy systems[M]// R E Kalman, N DeClaris. Aspects of Network and Systems Theory, New York：Holt, Rinehart and Winston, 1971.

［9］ Pedrycz, W. Fuzzy control and fuzzy systems[M]. New York: Wiley & Sons Inc , 1989.

［10］ Wang L X. Adaptive fuzzy systems and control : design and stability analysis[M]. Englewood CIIFfs, NJ：PTR Prentice Hall, 1994.

［11］ Bien Z, Min K C. Fuzzy logic and its application to engineering, information science, and intelligent systems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1995.

［12］ Bandemer H, Gottwald S. Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods with applications[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1995.

［13］ Lee Y H, Wei C C, Chang C L. Fuzzy design of process tolerances to maximize process capability [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1999, 15：655—659.