第22卷 第3期
2007年9月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.22 No. 3
Sep. 2007

运用复规范形法计算 Hopf 分岔系统的最简规范形

张 容[1,2]，王 炜[1]
（1. 天津大学机械学院，天津 300072；2. 天津职业大学机电学院，天津 300402）

摘 要：为简化最简规范形的求解过程，提出了一种应用复规范形理论计算 Hopf 分岔系统最简规范形的有效方法. 建立了复坐标下 Hopf 分岔系统的规范形及非线性变换，以复数运算替代原有实数形式矩阵表示法的矩阵推导过程，获得了此类 Hopf 分岔系统的最简规范形，归纳出了这一非线性系统最简规范形系数的选择规律. 通过算例验证了本方法对于简化传统规范形结果的有效性.

关键词：最简规范形；复规范形理论；Hopf 分岔；矩阵表示法
中图分类号：O322　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6510（2007）03-0069-03

The Simplest Normal Form of Hopf Bifurcation System with the Complex Normal Form Method

ZHANG Rong[1,2]，WANG Wei[1]
（1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China；
2. School of Electromechanical and Automation, Tianjin Professional College, Tianjin 300402, China）

Abstract：The approach of the complex normal form method was brought forward to more easily find the simplest normal form（SNF）of the Hopf bifurcation system. The normal form of that Hopf bifurcation system and the associated nonlinear transformation were constructed in the complex ordinate form. It substituted the matrix deduction process of the common real form matrix representation method with ordinary complex operation during the course of obtaining computation. With the help of that the SNF and the iterative formula of the Hopf bifurcation system were obtained more efficiently. An actual example attached indicated the validity of the SNF theory in the reduction of the normal form results.

Keywords：simplest normal form；complex normal form method；Hopf bifurcation；matrix representation method

在研究复杂动力系统平衡点附近的稳态响应或者分岔行为的过程中，往往先要采用规范形理论对系统的动力学方程进行简化，而后再进行相应的分析，但其简化结果的形式通常仍然比较复杂，因此郁培[1−4]在 Ushiki[5]的研究基础上又提出了最简规范形理论. 该理论通过采用新的非线性变换实现了对传统规范形结果的进一步简化. 其利用了近恒同非线性变换化简原微分方程的第 k 阶非线性项时会对高于 k 阶的非线性项产生影响这一特点，用第 k 阶的非线性变换项来化简原微分方程中高于 k 阶的非线性项.

目前广泛采用的最简规范形求解方法是矩阵表示法[1−4,6,7]，但是这种方法在计算过程中会涉及到比较复杂的矩阵运算. 本文将 Nayfeh[8]提出的一种不经矩阵分析获取非线性系统传统规范形的复规范形方法拓展至最简规范形领域，计算了高维 Hopf 分岔系统的最简规范形. 通过采用复数形式的规范形及非线性变换形式，用简单的复数运算替换了实数形式矩阵表示法的矩阵运算，得到了高阶系统的最简规范形表达式，克服了现有方法的计算复杂性问题，并通过实例验证了其对于简化传统规范形结果的有效性.

1 复规范形法求解系统传统规范形的思路

复规范形法是以复数形式表示非线性动力系统方程，并依据复数运算的自身特性计算系统的传统规范形，其好处是在规范形求解过程中不必引入矩阵运

收稿日期：2007-03-28；**修回日期**：2007-06-01
基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金资助项目（20060056005）
作者简介：张 容（1971—），女，天津人，讲师，硕士研究生.

算，所以求解过程比较简单也易于实现计算机编程. 下面以单自由度系统 Duffing 方程为例阐述复规范形法计算系统传统规范形的基本过程.

系统方程为

$$\ddot{u}+\omega^2 u=\alpha u^3 \tag{1}$$

引入复变量

$$u=\zeta+\bar{\zeta} \quad , \quad \dot{u}=i\omega(\zeta-\bar{\zeta}) \tag{2}$$

分别求解式(2)中的复变量 $\zeta,\bar{\zeta}$ 得到

$$\zeta=\frac{1}{2}(u-\frac{i}{\omega}\dot{u}) \quad , \quad \bar{\zeta}=\frac{1}{2}(u+\frac{i}{\omega}\dot{u}) \tag{3}$$

式(3)中的 ζ 对时间 t 求导，同时考虑式(1)有

$$\dot{\zeta}=i\omega\zeta-\frac{i\alpha}{2\omega}(\zeta+\bar{\zeta})^3 \tag{4}$$

引入由 ζ 到 η 的近恒同变换 $\zeta=\eta+h(\eta,\bar{\eta})$，并将其代入式(4)有

$$\dot{\eta}=i\omega\eta+i\omega h-\frac{\partial h}{\partial\eta}\dot{\eta}-\frac{\partial h}{\partial\bar{\eta}}\dot{\bar{\eta}}-\frac{i\alpha}{2\omega}[\eta+\bar{\eta}+h+\bar{h}]^3 \tag{5}$$

因为以上系统中的非线性项为立方非线性项，所以引入 3 阶近恒同变换 h：

$$h=\Lambda_1\eta^3+\Lambda_2\eta^2\bar{\eta}+\Lambda_3\eta\bar{\eta}^2+\Lambda_4\bar{\eta}^3$$

考虑一阶近似：$\dot{\eta}=i\omega\eta$，$\dot{\bar{\eta}}=-i\omega\bar{\eta}$，将它们代入式(5)，并且仅考虑直至 3 阶的非线性项，有

$$\dot{\eta}=i\omega\eta-i\omega(2\Lambda_1+\frac{\alpha}{2\omega^2})\eta^3-\frac{3i\alpha}{2\omega}\eta^2\bar{\eta}+i\omega(2\Lambda_3-\frac{3\alpha}{2\omega^2})\eta\bar{\eta}^2+i\omega(4\Lambda_4-\frac{\alpha}{2\omega^2})\bar{\eta}^3 \tag{6}$$

选择式(6)中的 Λ_1，Λ_3，Λ_4 以消去非共振项 $\eta^3,\eta\bar{\eta}^2,\bar{\eta}^3$，有

$$\Lambda_1=-\frac{\alpha}{4\omega^2} \ , \ \Lambda_3=\frac{3\alpha}{4\omega^2} \ , \ \Lambda_4=\frac{\alpha}{8\omega^2} \tag{7}$$

因为 $\eta^2\bar{\eta}$ 是共振项，所以应该将其保留在规范形的表达式中，那么系统(1)的 3 阶复数形式传统规范形就可以表示为

$$\dot{\eta}=i\omega\eta-\frac{3i\alpha}{2\omega}\eta^2\bar{\eta} \tag{8}$$

2　计算 Hopf 分岔系统的最简规范形

引入复坐标下 Hopf 分岔系统传统规范形[8]：

$$\dot{y}=iy+a_{21}y^2\bar{y}+a_{32}y^3\bar{y}^2+a_{43}y^4\bar{y}^3+\cdots+\sum_{p=1}^{m}a_{m+1,m}y^{m+1}\bar{y}^m \tag{9}$$

式中：$\bar{y}$ 为 y 的共轭；$m=\frac{1}{2}(n-1)$；n 为系统的阶数；a_x 为已知的传统规范形系数；同时 Hopf 分岔系统的传统规范形中只包含有奇次项[8]. 假设最简规范形与传统规范形具有相似的形式：

$$\dot{u}=iu+b_{21}u^2\bar{u}+b_{32}u^3\bar{u}^2+b_{43}u^4\bar{u}^3+\cdots+\sum_{p=1}^{m}b_{m+1,m}u^{m+1}\bar{u}^m \tag{10}$$

其中 b_x 为最简规范形系数. 计算过程中采用如下的非线性变换：

$$y=u+\sum_{j=0}^{3}c_{j,3\text{-}j}u^j\bar{u}^{3\text{-}j}+\sum_{j=0}^{5}c_{j,5\text{-}j}u^j\bar{u}^{5\text{-}j}+\sum_{j=0}^{7}c_{j,7\text{-}j}u^j\bar{u}^{7\text{-}j}+\cdots+\sum_{j=0}^{m}c_{j,\text{m-}j}u^j\bar{u}^{\text{m-}j} \tag{11}$$

其中 c_x 为非线性变换系数. 将(11)式中的 y 对时间 t 求导，并代入式(9)的左侧，同时考虑式(10)，比较方程两侧关于 $u^j\bar{u}^{n-j}$ 的各同阶项的系数，可以直接得到：

当 n=3 时有

$$c_{30}=c_{12}=c_{03}=0 \ , \ a_{21}=b_{21}$$

考虑 n=3 的结果，当 n=5 时有

$$c_{50}=c_{41}=c_{23}=c_{14}=c_{05}=0$$

$$a_{32}+a_{21}(2c_{21}+\bar{c}_{21})=b_{32}+(2a_{21}+\bar{a}_{21})c_{21}$$

同时考虑 n=3,5 的结果，当 n=7 时有

$$c_{70}=c_{61}=c_{52}=c_{34}=c_{25}=c_{16}=c_{07}=0$$

$$a_{43}+a_{32}(3c_{21}+2\bar{c}_{21})+a_{21}(c_{21}^2+2c_{32}+2c_{21}\bar{c}_{21}+\bar{c}_{32})=b_{43}+2b_{32}c_{21}+\bar{b}_{32}c_{21}+3a_{21}c_{32}+2\bar{a}_{21}c_{32}$$

省略更高阶 ($n\geqslant 9$) 时方程的具体形式，并对前几阶的结果进行如下分析：

由 $n=3$ 的结果可知：3 阶 Hopf 分岔系统的最简规范形与其传统规范形的形式是一致的，所以有 $\dot{u}=i\,u+a_{21}u^2\bar{u}$. 此外需要根据 5 阶系统方程确定在 3 阶情况下无法获得的非线性变换系数 c_{21} 的值.

由 $n=5$ 的结果可得系统的关键方程：

$$a_{r,32}-b_{r,32}+i(a_{i,32}-b_{i,32}+2a_{i,21}c_{r,21}-2a_{r,21}c_{i,21})=0 \tag{12}$$

此处 a_x，b_x，c_x 均为复数令 $a_x=a_{r,x}+ia_{i,x}$ $b_x=b_{r,x}+ib_{i,x}$，$c_x=c_{r,x}+ic_{i,x}$. 分别考虑方程式(12)的实部和虚部有 $a_{r,32}=b_{r,32}$，$a_{i,32}-b_{i,32}+2a_{i,21}c_{r,21}-2a_{r,21}c_{i,21}=0$. 由虚部结果可知：通过适当的选取 $c_{r,21},c_{i,21}$ 可以消去 $b_{i,32}$. 为简化计算，先假设 $c_{r,21}=0$ [1]，为使 $b_{i,32}=0$，有 $c_{i,21}=\frac{a_{i,32}}{2a_{r,21}}$. 那么直至 5 阶的最简规范形就可表示为

$$\dot{u}=iu+b_{21}u^2\bar{u}+b_{r,32}u^3\bar{u}^2 \tag{13}$$

当 $n=7$ 时，平衡方程两侧 $u^4\overline{u}^3$ 的同阶项系数，则可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}: & a_{r,43}+3a_{r,21}c_{r,32}-a_{i,32}c_{i,21}+a_{r,21}c_{i,21}^2-a_{i,21}c_{i,32}= \\ & b_{r,43}+5a_{r,21}c_{r,32}-a_{i,21}c_{i,32} \\ \mathrm{Im}: & a_{i,43}+3a_{i,21}c_{r,32}+a_{r,32}c_{i,21}+a_{i,21}c_{i,21}^2+a_{r,21}c_{i,32}= \\ & b_{i,43}+a_{i,21}c_{r,32}+3a_{r,32}c_{i,21}+5a_{r,21}c_{i,32}\end{aligned} \tag{14}$$

可见，如果适当地选择 5 阶非线性变换系数 c_{32} [1]便可以化简 7 阶最简规范形系数 b_{43}．所以令式(14)中的 $b_{r,43}=0, b_{i,43}=0$，再联立上述两方程可得

$$c_{r,32}=-\frac{-4a_{r,21}a_{r,43}+a_{i,32}^2}{8a_{r,21}^2}$$

$$c_{i,32}=\frac{a_{r,43}a_{i,21}-a_{r,32}a_{i,32}+a_{r,21}a_{i,43}}{4a_{r,21}^2}$$

当 $n=9$ 时，平衡方程两侧 $u^5\overline{u}^4$ 的同阶项系数，并利用 7 阶非线性变换系数 c_{43} [1]可以使 $b_{r,54}=0$，$b_{i,54}=0$，则有

$$c_{i,43}=\frac{2a_{i,21}^2a_{i,54}-a_{i,43}a_{r,21}a_{r,32}+a_{i,32}a_{r,32}^2-a_{i,21}a_{r,32}a_{r,43}}{8a_{i,21}^3}$$

$$\begin{aligned}c_{r,43}=&\left[-8a_{i,32}a_{i,43}a_{r,21}+8a_{i,32}^2a_{r,32}-a_{r,32}^3+8a_{i,21}^2a_{r,54}+\right. \\ &\left.4a_{i,21}(a_{i,43}a_{r,21}+7a_{i,43}a_{r,32}-2a_{i,32}a_{r,43})\right]/(48a_{i,21}^3)\end{aligned}$$

对 $n=2m+1, (n\geqslant 7)$，由以上的分析可知，总可以适当选择低一阶的非线性变换系数 $c_{m,m-1}$ 使得 $b_{r,m+1,m}=0$，$b_{i,m+1,m}=0$，所以用复规范形方法表示的 Hopf 分岔的最简规范形仅包含 1 阶、3 阶，以及部分的 5 阶项，这样系统(1)的表达式就可以最终简化为

$$\dot{u}=iu+(b_{r,21}+ib_{i,21})u^2\overline{u}+b_{r,32}u^3\overline{u}^2$$

由以上的分析可见，采用复规范形法求解 Hopf 分岔系统的最简规范形，可以完全避免复杂的矩阵运算，而直接获得各阶非线性变换和最简规范形系数，与传统的矩阵表示法相比，计算过程得到了极大简化.

3　实　例

高维 Hopf 分岔系统的最简规范形为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-\sqrt{2}x_1-\varepsilon\cdot(2x_2+3x_3)^2 \\ \dot{x}_2=-\sqrt{2}x_2+\varepsilon\cdot(4x_4+5x_1)^2 \\ \dot{x}_3=-2x_4+\varepsilon\cdot(6x_1+\varepsilon\cdot 7x_2x_4)^2 \\ \dot{x}_4=2x_3+\varepsilon\cdot(8x_3+\varepsilon\cdot 9x_2x_3)^2\end{cases}$$

应用本文所述理论得到系统如下的最简规范形：

$$\dot{u}=2iu-\frac{2560}{3}i\varepsilon^2u^2\overline{u}+\frac{4}{57}(-84671+26082\sqrt{2})\varepsilon^4u^3\overline{u}^2$$

由上述算例可知，应用最简规范形理论可以极大程度地简化复杂动力系统平衡点附近的系统方程，同时所得结果由于只包含部分低于 5 阶的非线性项，所以较传统规范形其形式更为简洁，因此也更便于在引入分岔参数的情况下，分析动力系统的局部及全局动力学行为.

4　结　语

本文围绕 Nayfeh[8]提出的复数形式传统规范形理论，计算了 Hopf 分岔系统的最简规范形. 建立了复坐标下 Hopf 分岔系统的传统规范形及非线性变换，并以复数形式传统规范形及变换为基础，在不经复杂矩阵运算的情况下，获得了 Hopf 分岔系统的最简规范形表达式，同时归纳出了最简规范形系数的选择规律. 此外，本方法也可以用于分析其他高余维非线性系统的最简规范形.

参　考　文　献:

［1］ Yu P. Simplest normal forms of Hopf and generalized Hopf bifurcations [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9（10）：1917—1939.

［2］ Yu P, Yuan Y. The simplest normal form for the singularity of a pure imaginary pair and a zero eigenvalue [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems（DCDIS）, Series B: Applications & Algorithms, 2001, 8（2）: 219—249.

［3］ Yuan Y, Yu P. Computation of simplest normal forms of differential equations associated with a double-zero eigenvalue[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2001, 11（5）: 1307—1330.

［4］ Yu P. Computation of the simplest normal forms with pertubation parameters based on Lie transform and rescaling[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 144（1—2）: 359—373.

［5］ Ushiki S. Normal form for singularities of vector fields [J]. Japan Journal of Applied Mathematics,1984, 1：1—34.

［6］ 张琪昌, 胡兰霞, 何学军. 高维 Hopf 分岔系统的最简规范形[J]. 天津大学学报, 2005, 38（10）：878—880.

［7］ 张琪昌, 胡士华, 王　炜. 不经中心流形化简计算半单系统的最简规范形[J]. 天津大学学报, 2006, 39（7）：773—776.

［8］ Nayfeh A H. Method of Normal Forms [M]. New York：John Wiley & Sons, 1993.