第 22 卷 第 2 期
2007 年 6 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.22 No. 2
Jun. 2007

NWUC 寿命分布类及其一类应用

崔家峰
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘 要：通过随机序的方法定义并分析了 NWUC 寿命分布类及其性质.利用在带有常利率的 Sparre Andersen 模型中对于破产概率上界估计的已有结果，得出当索赔额分布为 NWUC 时破产概率上界估计的更简洁结果.

关键词：NWUC；存活失效函数；破产概率

中图分类号：O211.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6510（2007）02-0066-02

Application of the NWUC Class of Life Distributions

CUI Jia-feng
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

Abstract：The NWUC class of life distributions is defined and some characters of it are considered by using stochastic ordering. The result is succinct when the distribution of claims is NWUC in upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with constant interest.

Keywords：NWUC；residual hazard distribution function；ruin probability

关于 HR（Hazard Rate）或 FR（Failure Rate）的研究十分广泛，主要应用于生命险、火险、存活分析以及可靠性理论等方面，它刻画了某个具有时间特征的随机变量（这里只考虑非负连续型随机变量）已经存活 x 前提下，在 x 处瞬间死亡可能性的强度. IFR（Increasing Failure Rate），IFRA（Increasing Failure Rate Average），NBU（New Better than Used），NBUE（New Better than Used in Expectation），HNBUE（Harmonic New Better than Used in Expectation）作为正年龄概念在维修策略的研究中有良好的应用[1]，其共同特征是新元件较之旧元件有更长的寿命. 作为上述分布类的对偶有所谓的负年龄概念 DFR（Decreasing Failure Rate），DFRA（Decreasing Failure Rate Average），NWU（New Worse than Used），NWUE（New Worse than Used in Expectation），HNWUE（Harmonic New Worse than Used in Expectation）. Cao 等[2]依据随机凸序[3]提出一类新的寿命分布 NWUC（New Worse than Used in Convex ordering）. 本文利用单调递增凸函数给出 NWUC 的等价定义，得到了判断 NWUC 的一个充分条件，并将其应用到一类带常利率 Sparre Andersen 模型破产概率的上界估计中，使得估计结果更加简洁有效.

定义 1 设非负连续随机变量 X,其分布函数为 F,概率密度函数为 f，定义失效率函数（FR 函数）$m(t)$ 为

$$m(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)},\ F(t)<1.$$

定义 2 称分布 F 是 IFR，如果 $m(t)$ 是单调不减的；称分布 F 是 DFR，如果 $m(t)$ 是单调不增的.

易知，$m(t)$ 为常数时，分布 F 既是 IFR，又是 DFR. 容易证明，分布 F 既是 IFR，又是 DFR 时，其只能为指数分布.

定义 3 称 F_t 是关于 F 的存活失效函数，如果

$$F_t(x)=\mathrm{P}(X-t\leqslant x\mid X>t),t\geqslant 0,F(t)<1 \quad (1)$$

并记相应随机变量为 X_t.易知，$X_t=(X-t\mid X>t)$. 于是有

$$F_t(x)=\frac{F(x+t)-F(t)}{1-F(t)} \quad (2)$$

则

收稿日期：2006-09-14；**修回日期**：2006-11-21
作者简介：崔家峰（1975—），男，天津人，讲师，硕士.

$$F_t(0)=0, F_0(x)=F(x) \tag{3}$$

定义 4　称分布 F 随机大于分布 G, 如果

$$\bar{F}(x)=1-F(x)\geqslant 1-G(x)=\bar{G}(x), x\in R \tag{4}$$

记为 $F\geqslant_{st} G$.

定义 5　称 F 为 NWU, 如果

$$F_t\geqslant_{st} F \tag{5}$$

定义 6　称 F 为 NWUC, 如果对于任意单调递增凸函数 $\phi(x)$ 均有

$$E\left[\phi(X_t)\right]\geqslant E\left[\phi(X)\right], t\geqslant 0 \tag{6}$$

注 1　上述定义成立的前提是（6）式两端期望都存在且有限.

定理 1　DFR⊂NWU⊂NWUC

证明: 由 Rolski 等[4]定理 2.4.2 知, F 是 DFR 当且仅当对于 $t_1\leqslant t_2$, 有

$$F_{t_1}\leqslant_{st} F_{t_2} \tag{7}$$

特别地, 令 t_1=0,即有式(5)成立,因此 DFR⊂NWU

如果 F 为 NWU, 则

$$F_t\leqslant F \tag{8}$$

对于任意单调递增凸函数 ϕ, 有 $\phi'\geqslant 0$.将式（8）两端同时乘上 ϕ', 并从 0 到 ∞ 积分. 利用分部积分法（ϕ 满足定义 6 的注）, 整理并注意到式（3）, 于是得到式（6）, 此即 F 为 NWUC.

定理 2　设 Y 服从 *Gamma* 分布, 其分布函数记为 $F(y)$, 其概率密度为

$$f(y)=\frac{\lambda^{\alpha}y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda y}, y\geqslant 0,\ \lambda>0$$

则当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, $F(y)$ 为 NWUC.

证明:　*Gamma* 函数的失效率函数为

$$\mu(y)=\frac{f(y)}{\bar{F}(y)}, y\geqslant 0$$

因此 $\dfrac{1}{\mu(y)}=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(x+y)}{f(y)}\mathrm{d}x$.

对于 *Gamma* 分布, $\dfrac{f(x+y)}{f(y)}=\left(\dfrac{x+y}{y}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}$. 故当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, $\dfrac{f(x+y)}{f(y)}$ 关于 y 非减, 既而 $\mu(y)$ 关于 y 非增.

从而当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, *Gamma* 分布为 DFR, 进而由定理 1 知 *Gamma* 分布为 NWUC.

注 2　当 $\alpha=1$ 时, *Gamma* 分布成为负指数分布.

注 3　当 $\alpha>1$ 时, $\mu(y)$ 关于 y 非减,此时 *Gamma* 分布为 IFR, 因此是 NBUC（New Better than Used in Convex ordering）. 有关更详细的随机序分析, 参见文献[5].

定理 3　设 $\theta^{-1}=\inf\limits_{t\geqslant 0}\dfrac{\int_t^{\infty}e^{Ry}\,\mathrm{d}P(y)}{e^{Rt}\bar{P}(t)}, \forall t\geqslant 0$, 其中 R 为一固定正常数. 如果 P（非负随机变量 Y 的分布函数）为 NWUC, 则

$$\theta E\left[\exp\{RY\}\right]=1 \tag{9}$$

证明: 由 θ^{-1} 的定义知, $\theta^{-1}\leqslant\dfrac{\int_t^{\infty}e^{Ry}\,\mathrm{d}P(y)}{e^{Rt}\bar{P}(t)}, \forall t\geqslant 0$

特别令 $t=0$, 则有

$$\theta E\left[\exp\{RY\}\right]\geqslant 1 \tag{10}$$

因为 P 为 NWUC, 取 $\phi(x)=e^{Rx}$, 根据式（6）, 并结合式（2）有

$$\frac{\int_0^{\infty}e^{Rx}\,\mathrm{d}P(x+t)}{\bar{P}(t)}\geqslant E\left[e^{RY}\right] \tag{11}$$

将式（11）左端分子作一下变换, 令 $y=t+x$ 得

$$\frac{\int_t^{\infty}e^{Ry}\,\mathrm{d}P(y)}{e^{Rt}\bar{P}(t)}\geqslant E\left[e^{RY}\right] \tag{12}$$

对式(12)两端关于 t 取下极限, 结合 θ^{-1} 的定义有

$$\theta E\left[\exp\{RY\}\right]\leqslant 1 \tag{13}$$

结合式（10）和式（13）即有式（9）成立.

定理 4 在带常利率 r 的 Sparre Andersen 模型中, 若索赔额 Y 的分布为 NWUC, 则

$$\varphi_r(u)\leqslant E\left[\exp\left\{-R\left(ue^{rT}+c\bar{s}_{\overline{T}|}^{(r)}\right)\right\}\right] \tag{14}$$

其中 $\varphi_r(u)$ 是带常利率 r 的 Sparre Andersen 模型中初值为 u 的破产概率, T 是索赔时间间隔, R 满足 $E\left[\exp\left\{-R\left(c\bar{s}_{\overline{T}|}^{(r)}-Y\right)\right\}\right]=1$, 且 $\bar{s}_{\overline{t}|}^{(r)}=\begin{cases}\dfrac{e^{rt}-1}{r}, & r>0\\ t, & r=0\end{cases}$.

证明: 利用文献[6]的结果有

$$\varphi_r(u)\leqslant\theta E\left[\exp\{RY\}\right]E\left[\exp\left\{-R\left(ue^{rT}+c\bar{s}_{\overline{T}|}^{(r)}\right)\right\}\right] \tag{15}$$

其中 θ 定义同定理 3.

由于索赔额 Y 的分布为 NWUC, 根据定理 3, $\theta E\left[\exp\{RY\}\right]=1$, 即有式（14）成立.

特别地, 如果索赔额服从 $0<\alpha\leqslant 1$ 的 *Gamma* 分布时, 其破产概率的一个上界估计与式（14）一致.

参　考　文　献:

［1］ Barlow R E, Proschan F.　Statistical Theory of Reliability and Life Testing [M].　Madison: Silver Spring, 1981.

（下转第 71 页）