



基于小波变换的投影光栅条纹分析

杨 诚, 于德敏, 许增朴, 王永强
(天津科技大学机械工程学院, 天津 300222)

摘 要: 投影光栅条纹相位法通常用于三维物体形貌的测量. 采用小波变换直接提取单幅光栅条纹图像的相位分布, 不需要进行相位展开, 即可得到物体表面轮廓. 给出了小波分析应用在空间载波光栅条纹相位分析中的理论推导证明、计算机模拟以及实验验证结果, 讨论了小波分析的抗噪能力, 证实了该方法的可行性.

关键词: 小波变换; 条纹投影; 相位提取; 轮廓测量

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-6510 (2007) 02-0040-05

Projected Fringe Patterns Analysis Based on Wavelet Transform

YANG Cheng, YU De-min, XU Zeng-pu, WANG Yong-qiang

(College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

Abstract: Phase approaching of projected grating is used usually in the measurement of three dimensional surface. Wavelet transform algorithm has been used to extract directly the phase distribution from fringe single pattern without phase unwrapping step, thus the surface profile of the object is obtained. The theory, simulation result and an example of three dimensional shape measurement were given. The de-noising ability of wavelet analysis was also discussed. Theory and simulation results show that method is practicable.

Keywords: wavelet transform; fringe projection; phase retrieval; profile measurement

投影光栅相位法测量在三维物体形貌测量中有着广泛的应用, 而光栅图像相位的求取是光栅轮廓测量中的关键技术和重要的研究课题. 传统的光栅图像相位分布提取方法主要有莫尔条纹法、相移法和傅里叶变换法等^[1]. 其中, 相移法是一种高分辨率的相位提取方法, 但是该方法须采集三幅或三幅以上的图像, 不适合于实时动态测量. 傅里叶变换方法只需分析单幅光栅图像, 适于实时动态测量, 但需要滤波运算, 需进行两次数学变换, 直接影响测量精度. 这两种方法都需要进行相位展开运算, 不仅过程复杂, 且易受到图像采样不足、频谱泄漏、噪声等因素的影响而导致失败^[2].

针对投影光栅图像的相位分布求取问题, 采用小波变换对光栅图像进行分析, 可以直接从单幅光栅图像中求取相位梯度分布, 进而对相位梯度积分可以得到光栅图像空间的相位分布. 该方法不需相

位展开, 从而避免了相位展开带来的若干难题和复杂算法. 本文采用 Morlet 小波对光栅图像信号进行分析, 给出理论推导证明, 以及计算机模拟及实验验证结果.

1 小波变换理论

小波 (wavelet), 即小区域的波, 是一种特殊的长度有限、平均值为 0 的波形. 它的定义: 设 $h(x)$ 为一个平方可积函数, 即 $h(x) \in L^2(R)$, 若其傅里叶变换 $h(\omega)$ 满足条件

$$C_h = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (1)$$

则称 $h(x)$ 为一个基本小波或小波母函数, 式(1)称为小波函数的允许条件.

收稿日期: 2006-11-03; 修回日期: 2007-03-08

基金项目: 天津市自然科学基金资助项目 (013602211)

作者简介: 杨 诚 (1982—), 男, 河南南阳人, 硕士研究生.

小波变换是把某一个小波母函数 (mother wavelet) $h(x)$ 作一定的平移和伸缩后与待分析信号 $f(x)$ 作内积,即:

$$W_f(s,b) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} h^* \left(\frac{x-b}{s} \right) f(x) dx \quad (2)$$

式中: $s>0$, 为尺度因子,它与频率有关,其作用是使基小波 $h(x)$ 伸缩; b 是位移因子,其值可正可负,它与时间和位置有关; *表示复数共轭. 由于 s 和 b 都是连续的变量,故称为连续小波变换 (Continuous Wavelet Transform) [3].

小波基函数 $h_{s,b}(x)$ 是通过满足允许条件 (Admissibility Condition) 的母小波 $h(x)$ 的尺度伸缩和平移得到,如式 (3) 所示.

$$h_{s,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} h \left(\frac{x-b}{s} \right) \quad (3)$$

为了提高运算速度,可以采用快速傅里叶变换算法实现小波变换. 根据巴塞瓦 (Parseval) 能量守恒定理,小波变换可以表达成另一种形式,即频域表示形式:

$$W_f(s,b) = \sqrt{s} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(sk) F(k) \exp(ibk) dk \quad (4)$$

式中: $\sqrt{s}H(sk)$ 和 $F(k)$ 分别是 $\frac{1}{\sqrt{s}}h(\frac{x}{s})$ 和 $f(x)$ 的傅里叶变换形式.

小波变换系数 $W_f(s,b)$ 反映了信号 $f(x)$ 与小波序列 $h_{s,b}(x)$ 函数的相似程度. 因此连续小波变换可以理解为将信号和小波函数进行比较的结果,幅值和相位综合反映它们的相似程度. 当被测信号的局部频率与相应尺度的小波函数的振荡频率相同或相近时,其小波系数值相应较大. 小波变换系数 $W_f(s,b)$ 的模值 $|W_f(s,b)|$ 的极大值集中体现了被测信号的奇异特征.

2 光栅图像的小波分析

2.1 小波母函数的选择

与傅里叶变换不同,小波变换的基函数没有固定的形式,选择适当的小波母函数 $h(x)$ 对准确地分析信号是十分重要的.

小波变换在检测空间频率瞬变时,为了分离信号的幅值和相位成份,需要使用复数小波[4]. 根据常用连续小波变换的复数母小波函数的性质,可以选用 Morlet 小波、Paul 小波和 hermitian 小波作为分析纹理图像小波母函数. 针对这几种小波函数的形状、时频域局部特性及模拟试验比较结果,决定采用 Morlet 小波作为分析光栅条纹图像的母小波.

Morlet 小波是一种单频复正弦调制高斯波,可以很好地表征光栅图像中的正弦信号特征,以及相位信息;该小波在空、频两域中都存在最小的展开,即其空域和频域都有良好的局部特性,也是最常用的复数小波. Morlet 小波定义为

$$h(x) = \pi^{-1/4} \exp(icx) \exp(-x^2/2) \quad (5)$$

其傅里叶变换为

$$H(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\pi}} \exp \left[-\frac{(k-c)^2}{2} \right] \quad (6)$$

式中: c 是 Morlet 小波的一个固定空间频率. 此外, Morlet 小波不满足允许条件,但当 $c \geq 5$ 时,允许条件近似成立, c 常取 5 或 6. 图 1(a) 图 1(b) 分别为 Morlet 小波在空域和频域中的波形. 由图可以看出, Morlet 小波使用的高斯窗函数是一种理想的窗函数形状. 因此,在本实验过程中决定采用 Morlet 小波作为小波分析的母函数.

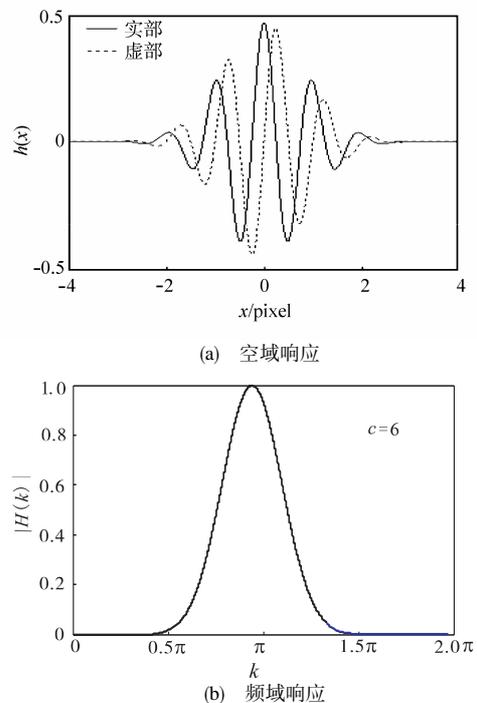


图 1 Morlet小波的空域响应和频域响应
Fig.1 Space-domain and frequency-domain response of Morlet wavelet function

2.2 小波分析求解相位

在投影光栅相位法测量中,常常采用正弦光栅作为投射光栅,设载波沿 x 方向,则条纹图像的表达式为

$$I(x,y) = I_0(x,y) [1 + V(x,y) \cos(mx + \Phi(x,y))] \quad (7)$$

式中: I_0 为背景光强; V 是光栅条纹对比度; Φ 为光学相位; p 为光栅条纹栅距; mx 为调制载波相位, $m=2\pi/p$. 空间载波必须满足条件

$$m > \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\max} \quad (8)$$

以式(6)的某一行(沿 x 方向)作分析对象,即得到一维光栅条纹信号的强度分布为

$$g(x) = I_0(x)[1 + V(x)\cos(mx + \Phi(x))] \quad (9)$$

由式(1)、式(3),对一维光栅条纹信号进行小波变换:

$$W_g(s, b) = \sqrt{s} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(sk)G(k)\exp(ibk)dk \quad (10)$$

在工程中,近似地将小波频谱中能量最多的频率值作为小波的中心频率.根据小波变换的物理意义,当被测信号的局部频率与相应尺度的小波函数的中心振荡频率相同或相近时,其小波变换模取极大值.此时,小波变换的相角 Φ 相对平移量 b 的偏导数,在小波变换模极大值交点处,其值等于母小波函数的中心频率.根据小波的局部特性,将相位 Φ 在小波母函数的时空域窗口中心 c 处展开成泰勒级数,相位 Φ 可以近似表示为

$$\Phi(x) \approx \Phi(b) + (x - b)\Phi'(b) \quad (11)$$

根据小波函数的局部特性,假设 I_0 和 V 都变化缓慢,或者均为常数,在实际应用中大多情况也是如此,这样有利于发挥小波分析的优势.则该一维条纹信号可以用傅里叶变换形式表示为

$$G(k) = I_0(b)\pi\{V(b)[\delta(k - m - \Phi'(b))e^{i[\Phi(b) - b\Phi'(b)]} + \delta(k + m + \Phi'(b))e^{-i[\Phi(b) - b\Phi'(b)]}] + 2\delta(k)\} \quad (12)$$

把式(6)和式(12)代入到式(10)中,其中 $k < 0$ 时, $H(sk) = 0$.于是可以得到:

$$W_g(s, b) = I_0V(b)\pi^{5/4}\sqrt{2s}\exp[i(\Phi(b) + bm)] \times \exp\left[\frac{[s(m + \Phi'(b)) - c]^2}{2}\right] \quad (13)$$

式(13)小波变换系数的模为

$$\rho(s) = |W_g(s, b)| \quad (14)$$

令 $\frac{d\rho}{ds} = 0$, 并由尺度 $s > 0$, 解得模极大值对应的尺度为

$$s_{\max}(b) = \frac{c + \sqrt{c^2 + 2}}{2(m + \Phi'(b))} \quad (15)$$

在此尺度下,小波基函数的振荡频率与正弦信号的振荡频率恰好相等,可以发生共振.于是得到所求一维光栅信号的相位梯度:

$$\Phi'(b) = \frac{c + \sqrt{c^2 + 2}}{2s_{\max}(b)} - m \quad (16)$$

对式(16)沿着 $s_{\max}(b)$ 积分便可得到相位值.

2.3 算法求解步骤

使用连续小波变换从二维光栅图像中提取相位分布主要步骤如下:

(1) 对光栅图像的每一行(或列),将该一维

信号左右边缘进行零扩展(zero-padding),然后对其进行傅里叶变换.

(2) 选择合适的小波母函数和尺度集,在每一个尺度上对扩展后的数据进行连续小波变换,然后截断.

(3) 在小波变换系数中寻找模极大值,确定模极大值曲线 $s_{\max}(b)$.

(4) 将所求的相位梯度 Φ' 沿模极大值路径 $s_{\max}(b)$ 积分即可得到该行(或列)的相位分布.

(5) 对图像的每一行重复(1)~(4)过程,即确定二维条纹图的相位分布.

3 模拟分析

在计算机模拟试验中,以一个一维模拟相位调制信号的相位提取来说明该算法的有效性.模拟的相位分布函数为

$$\Phi(x, y) = 0.3\exp(-(x-100)^2/2000) + 0.8\exp(-(x-250)^2/5000) + 0.5\exp(-(x-400)^2/1000) \quad (17)$$

将式(17)代入式(6)即可得到模拟的光栅条纹强度分布,其中取 $I_0 = 1.0$, $V = 1.0$, $m = 1.0$ rad/pixel, 条纹图像的大小为 512 pixel \times 512 pixel. 模拟的相位分布图如图 2 所示.

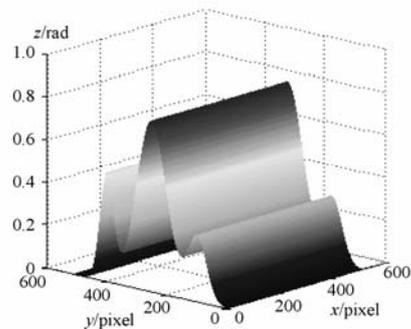


图 2 模拟的相位分布

Fig.2 Simulated phase distribution

取该条纹图像第 256 行条纹信号进行小波分析,采用 Morlet 小波, $c=6$. 对该一维信号进行连续小波变换,通过寻求小波变换系数的模极大值确定该模拟相位的相位梯度,对梯度积分可以直接得到相位分布.小波分析恢复得到的相位分布(实线)和模拟的相位分布(虚线)比较如图 3 所示.其对应的相位误差分布如图 4 所示.误差的产生主要由在式(11)相位 Φ 的泰勒级数展开时忽略其高阶导数以及在运算过程中积分等算法的实现引起的.另外小波尺度函数的选择对分析结果也有重要的影响,可以通过增加小波尺度总数来提高频域分辨率,进而提高

分析精度, 但会延长运算时间^[5].

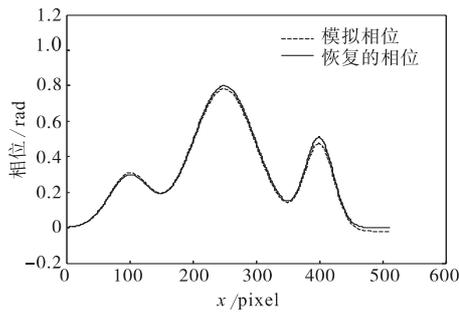


图3 小波分析恢复的相位与模拟相位比较
Fig.3 Obtained phase by wavelet method and simulated phase

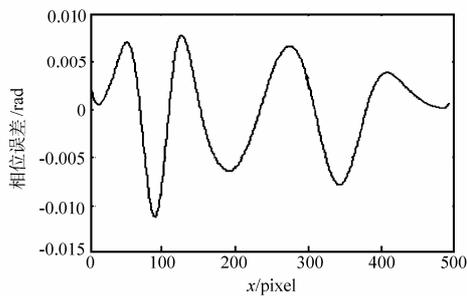


图4 小波分析方法恢复相位的相位误差
Fig.4 Phase Error between obtained phase by wavelet method and simulated phase

计算机模拟结果表明: 小波分析可以很好地提取傅里叶变换轮廓测量法中相对于基准光栅图像基频的相位调制分布, 并得到满意的结果, 恢复的相位相对误差在 10^{-3} 数量级, 体现了该方法的优越性.

小波分析处理过程的积分会导致局部误差的传播, 但这些误差是很小的, 因为小波是从包含在大量相邻像素的信息中提取相位梯度的, 有效地均衡了噪声, 有较好的抗噪能力. 向光栅条纹图像中加入均值为 0, 方差为 0.04 的高斯噪声. 对该包含噪声的条纹图像进行小波分析, 恢复的相位误差分布如图 5 所示, 误差曲面峰谷间距离为 1.725 6 pixel, 均方根值为 0.50032 pixel.

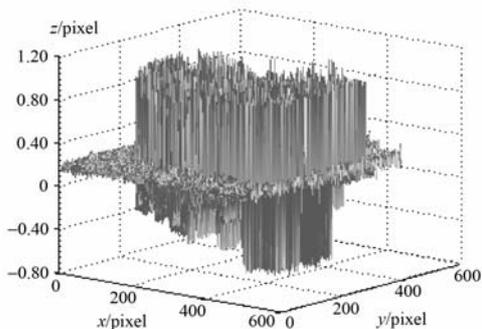


图5 小波分析噪声条纹图像的相位误差分布
Fig.5 Phase error distribution of fringe pattern image with noise by wavelet method

但必须指出的是, 文中提出的小波变换分析方法是对图像的每一个点均应用一系列不同尺度的小波基进行小波变换, 以及相位信息提取操作, 因此该方法是以计算时间作为代价来获取精度的.

4 实验

以人体头像为测量对象, 采用 LCD 投影仪 (Sony XGA VPL-CX80) 投射正弦光栅到物体表面, 实验装置如图 6 所示. 其中光栅的节距为 8 pixel, 即 $m=\pi/4(\text{rad}/\text{pixel})$, 光栅图像的尺寸为 512 pixel \times 512 pixel. 正弦光栅图像由计算机系统生成, 传送到数字投影仪中, 并投影在待测物体表面. 变形光栅图像由 CCD 摄像机采集, 然后送到计算机进行处理, 采集到的变形光栅图像如图 7 所示.

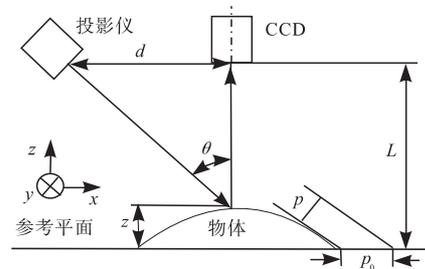


图6 实验装置结构图
Fig.6 Experimental setup

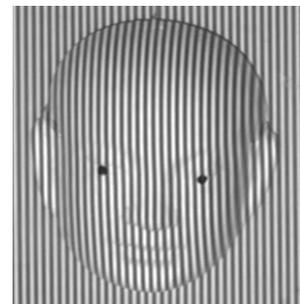


图7 变形光栅图像
Fig.7 Deformed fringe pattern image

采集的参考光栅和变形光栅的第 256 行条纹信号的波形图像如图 8 所示. 采用小波变换分别对采集的参考平面光栅图像和物体表面变形光栅图像进行处理, 分别得到两幅图像的相位 $\Phi_r(x,y)$ 和 $\Phi_o(x,y)$, 于是可以得到被测物体表面的调制相位分布 $\Phi(x,y)=\Phi_o(x,y)-\Phi_r(x,y)$. 根据文献[6]可以得到物体表面的轮廓坐标为

$$z(x,y) = \frac{Lp_0 \left[\frac{\Phi(x,y)}{2\pi} \right]}{p_0 \left[\frac{\Phi(x,y)}{2\pi} \right] - d} \quad (18)$$

式中： $p_0 = p / \cos \theta$, p 是光栅条纹的周期; L 是摄像机到参考平面的距离; d 是摄像机镜头光心和投影仪镜头光心之间的距离; z 为被测物体轮廓高度尺寸.

得到的测量结果如图 9 所示, 恢复的相对误差范围在 $\pm 1.5\%$, 可见小波分析可以较好的解调出真实的人体头像轮廓.

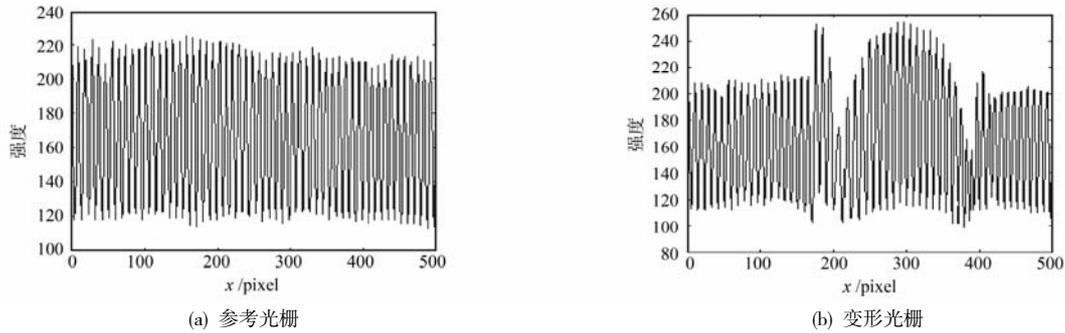


图 8 参考光栅和变形光栅第 256 行信号波形图
Fig.8 The 256th row of reference grating image and deformed grating image

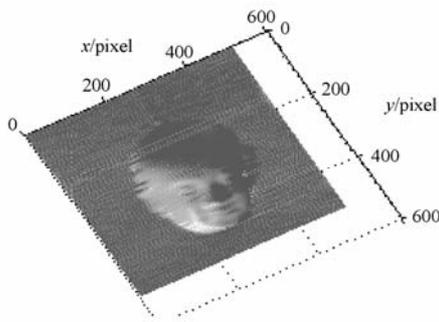


图 9 小波分析方法恢复的人体头像轮廓
Fig.9 Height profile of bust analyzed by wavelet transform

5 结 论

本文在小波分析理论上, 给出了应用连续小波变换在提取光栅条纹图像相位分布的算法理论分析和证明. 该算法在位置—空间—频率域中利用连续小波变换系数的模的极大值确定被测表面的相位梯度, 通过积分得到相位分布, 避免了相位展开过程, 同时保持了单幅图像处理的优点. 给出了计算机模拟以及实验结果, 很好地恢复了物体的三维

形面, 验证了该算法的可行性和适用性. 但由于应用小波分析时运算量较大, 测量速度会受到一定的限制, 还需要在连续小波变换算法快速实现上作深入的研究. 另外, 对于被测曲面梯度不连续的情况, 该分析方法失效.

参 考 文 献:

- [1] F Chen, G M Brown, M Song. Overview of three-dimensional shape measurement using optical methods[J]. Opt Eng, 2000, 39 (1) : 10—22.
- [2] Su X, Chen W. Fourier transform profilometry: a review [J]. Opt Lasers Eng, 2001, 35: 263—284.
- [3] 孙延奎.小波分析及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社,2005: 3.
- [4] Amara Graps .An introduction to wavelets[J]. IEEE Computational Science and Engineering, 1995, 2 (2) : 50—61.
- [5] A Dursun, S Ozder, F N Ecevit. Continuous wavelet transform analysis of projected fringe patterns[J]. Meas Sci Technol, 2004, 15: 1768—1772.
- [6] Takeda M, Mutoh K. Fourier transform profilometry for the automatic of 3-D object shapes[J]. Appl Opt, 1983, 22: 3977—3982.