第 22 卷　第 1 期
2007 年 3 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.22　No.1
Mar. 2007

关于积分中值定理“中值点”位置的估计

吴天毅
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘　要：根据某些函数的特性,利用泰勒公式和微分中值定理对积分中值定理中“中值点”在区间 (a,b) 内的位置进行了讨论,得到了一种非常实用有效的近似估计方法,改善了已有方法估计的精度.

关键词：积分；中值定理；中值点

中图分类号：O172.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6510(2007)01-0070-02

The Estimation of the Location on the Mean Points of the Theorems of Mean Integral Calculus

WU Tian-yi
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

Abstract：With the features of functions,by Taloy formular and the mesae formulor,it have been researched on the location of the mean points of the mean theorems in integral calculus, and obtained a practicable approximate estimation , and the precision of the calcation result has beed improved by the new result.

Keywords：integral；theorem of mean；mean point

定理 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,那么在积分区间 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ 使下式成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b) \tag{1}$$

定理 1 就是著名的积分中值定理,式（1）称为积分中值公式,式（1）中的点 ξ 称为积分中值定理的中值点[1]. 关于中值点 ξ 究竟在区间 $[a,b]$ 上位于何处,一直是人们关心的问题.

定理 2　如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a)\neq 0$,那么积分中值定理公式（1）中的中值点 ξ 满足

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2} \tag{2}$$

定理 2 阐述了积分中值定理中值点的一个渐近性质.由这一性质可知,当积分区间越小,中值点 ξ 的位置越接近于积分区间的中点[2].

本文通过下面的定理对积分中值定理中值点的位置以及所要求的积分值给出一种实用的近似估计.

定理 3　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续的 $n+2$ 阶导数,且

$$f^{(k)}(a)=0 \qquad k=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$f^{(n+1)}(a)\neq 0 \tag{4}$$

$f^{(n+1)}(x)$ 与 $f^{(n+2)}(x)$ 在区间 (a,b) 内异号,那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 满足:

（i）I 介于 L_0 与 L_1 之间

（ii）取 $\bar{L}=\dfrac{L_0+L_1}{2}$,则有

$$I-\bar{L}=\pm(L_1-\bar{L})=\pm(L_0-\bar{L}) \tag{5}$$

（iii）积分中值定理中值点 ξ 满足

$$a+\theta_0(b-a)<\xi<a+\theta_1(b-a) \tag{6}$$

其中

$$\theta_0=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}},\quad \theta_1=\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+2}} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} L_0&=(b-a)f[a+\theta_0(b-a)]\\ L_1&=(b-a)f[a+\theta_1(b-a)] \end{aligned} \tag{8}$$

证明：记 $L_1=(b-a)f[a+\theta_1(b-a)]$ （9）

收稿日期：2006-09-12
作者简介：吴天毅（1955—）,男,广东潮安人,教授.

$$r_1 = I - L_1 \qquad (10)$$

将函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处进行泰勒展开,注意到式（3）有

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{(n+2)!}(x-a)^{n+2}\quad a\leqslant x\leqslant b \qquad (11)$$

其中 $\sigma\in(a,b)$ [3].

由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续的 $n+2$ 阶导数, $f^{(n+2)}(x)$ 在区间 (a,b) 内不变号,从而

$$L_1=(b-a)f[a+\theta_1(b-a)=]$$
$$(b-a)f(a)+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\theta_1^{n+1}(b-a)^{n+2}+\frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{(n+2)!}\theta_1^{n+2}(b-a)^{n+3}$$

因此得到

$$r_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-L_1=\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(\frac{1}{n+2}-\theta_1^{n+1})+\frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{(n+2)!}(\frac{1}{n+3}-\theta_1^{n+2})(b-a)^{n+3}$$

其中 $\sigma\in(a,b)$

由于　$\theta_1=\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+2}}$,所以 $\frac{1}{n+2}-\theta_1^{n+1}=0$ ，故

$$r_1=\frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{(n+2)!}(\frac{1}{n+3}-\theta_1^{n+2})(b-a)^{n+2}$$

综上所述有

$$I=L_1+r_1=(b-a)f[a+\theta_1(b-a)]+\frac{f^{(n+2)}(\sigma)}{(n+2)!}(\frac{1}{n+3}-\theta_1^{n+2})(b-a)^{n+3} \qquad (13)$$

其中 $\sigma\in(a,b),\ \theta_1=\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+2}}$

若在上述推导中用 n 代替 $n+1$,则可得到

$$I=L_0+r_0=(b-a)f[a+\theta_0(b-a)]+\frac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)!}(\frac{1}{n+2}-\theta_1^{n+1})(b-a)^{n+2} \qquad (14)$$

其中　$\sigma\in(a,b),\theta_0=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

$$L_0=(b-a)f(a+\theta_0(b-a))$$

$$r_0=\frac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)!}(\frac{1}{n+2}-\theta_0^{n+1})(b-a)^{n+2}$$

由式（13）、式（14）可知,只要 r_0 与 r_1 异号,那么 L 一定介于 L_0 与 L_1 之间.事实上,由于 $\frac{1}{n+3}-\theta_1^{n+2}>0$， $\frac{1}{n+2}-\theta_0^{n+1}>0$，所以 r_0 与 $f^{(n+1)}(\sigma)$ 同号， r_1 与 $f^{(n+2)}(\sigma)$ 同号．由定理条件知 $f^{(n+1)}(x)$ 与 $f^{(n+2)}(x)$ 在 (a,b) 内异号，从而必有 r_0 与 r_1 异号，这时便可得知[4,5]

（ｉ）L 一定介于 L_0 与 L_1 之间

（ii）取 $\bar{L}=\frac{L_0+L_1}{2}$,则

$$I-\bar{L}=\pm(L_0-\bar{L})=\pm(L_1-\bar{L})$$

（iii）积分中值定理中值点 ξ 满足

$$a+\theta_0(b-a)<\xi<a+\theta_1(b-a)$$

证毕.

利用定理 3 容易估计出中值点 ξ 的位置和积分 $I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值及其误差.

例:设 z,试估计 I 的近似值及中值点 ξ 的范围.

解:记 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 可知 $f(x)=\int_0^1\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

$$f'(x)=\int_0^1 -t\sin(xt)\,\mathrm{d}t,\ f'(0)=0$$

$$f''(x)=\int_0^1 -t^2\cos(xt)\,\mathrm{d}t,\ f''(0)\neq 0$$

$$f'''(x)=\int_0^1 t^3\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

显然在 $(0,1)$ 内 $f''(x)$ 与 $f'''(x)$ 异号,这时定理 3 中应取 $n=1$,从而 $\theta_0=\frac{1}{2},\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以

$$I\approx\bar{L}=\frac{L_0+L_1}{2}\approx 0.952107066$$

误差 $I-\bar{L}=\pm 0.674401\times 10^{-2}$

积分中值定理中值点 ξ 的范围为

$$0.5<\xi<0.577350269$$

事实上

$$\xi=\frac{1}{2}(0.5+0.577350268)=0.538675134$$

$$I\approx(b-a)f(\xi)=(b-a)\frac{\sin\xi}{\xi}\approx 0.952335014$$

参　考　文　献:

［1］ 齐勋章.数学分析[M]．第 2 版．北京:人民教育出版社,2002:119—125,276—277.

［2］ 李文荣．关于积分中值定理中间点的渐近性[J].数学的实践与认识,2001（2）:32—36.

［3］ 李庆扬.数值分析[M]．武汉:华中工学院出版社,2004:117—121.

［4］ 张加权.变精度数值积分公式[J].数值计算,2003（3）:63—69.

［5］ 王　维.单节点数值积分公式的改进[J].数值计算,2004（1）:22—27.