第 22 卷 第 1 期
2007 年 3 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.22 No.1
Mar. 2007

带 Markov 跳跃参数的奇异随机微分方程指数稳定性

王海萍
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘 要：通过构造新的 Lyapunov 函数,并利用矩阵范数的定义和性质,在 Markov 调制的随机微分方程的指数稳定性基础上,建立了 Markov 调制的奇异随机微分方程的 p 阶指数稳定性和几乎必然指数稳定性的条件并予以证明.

关键词：奇异随机微分方程; 指数稳定性；几乎必然指数稳定性；Markov 链

中图分类号：O193 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6510（2007）01-0067-03

Exponential Stability of Singularly Stochastic Differential Equations with Markov Switching

WANG Hai-ping
(College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457, China)

Abstract：Singularly stochastic differential equation with Markov switching is studied. By constructing the new Lyapunov function,some sufficient conditions are obtained and prooved for p –moment exponential stability and almost surely exponential stability.

Keywords：singularly stochastic differential equations；exponential stability； almost surely exponential stability；Markov chains

稳定性理论是研究动态系统中的过程（包括平衡位置） 相对干扰是否具有自我保持能力的理论. 而评价一个控制系统有各种质量指标,其中稳态指标就是非常重要的一项.对于一般非线性系统的稳定性讨论,数学上处理非线性问题的困难至今依然很多.奇异微分方程[1,2] 在动力系统的稳定性研究中应用非常广泛. 此外,由于在现实生活中,大多数动力系统的结构会受到各种随机因素的干扰,包括各种外界因素和内部因素,如空气的阻力、温度的变化、系统间的摩擦等. 其中一类特殊的动力系统模型是带有 Markov 调制的系统,即该系统有许多不同的运行模式,但其所有模态都由一个 Markov 过程所控制.Markov 调制的动力系统的稳定性是近年来稳定性研究中的一个热点[3－6],但是关于 Markov 调制的奇异随机微分方程研究较少.本文在上述研究基础上,将两类方程结合起来,考虑下列 Markov 调制奇异随机微分方程,将随机微分方程指数稳定性结果推广到一般化.

1 Markov 调制奇异随机微分方程及其指数稳定性

设 (Ω, F, P) 是一个完备的概率空间, $\omega(t)=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 上的 n 维布朗运动. $|.|$ 表示 R^n 上的 Euclidean 范数. $r(t)$ 是概率空间上一右连续的有限 Markov 链. 进一步假设 $r(.)$ 与布朗运动 $\omega(.)$ 相互独立,令 $C^{2,1}(R^n\times R_+\times S, R_+)$ 表示所有的非负函数 $V(x,t,i)$ 的集合, $V(x,t,i)$ 关于 x 二次连续可微,关于 t 一次连续可微.

Markov 调制奇异随机微分方程一般形式如下:

$$Hdx(t)=f(x(t),t,r(t))dt+g(x(t),t,r(t))d\omega(t) \quad (t\geqslant 0) \tag{1}$$

其中初始条件 $x(0)=x_0\in R^n$, $f:R^n\times R_+\times S\to R^n$ 和 $g:R^n\times R_+\times S\to R^{n\times m}$. H 是一个奇异矩阵,且函数 f

收稿日期：2006-09-04
作者简介：王海萍（1978—）,女,山西平遥人,助教,硕士.

和 g 满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件.

定义 1[1]称方程（1）是 p 阶指数稳定,如果存在常数 $A>0$ 和 $\alpha>0$ 使得

$$E|x(x_0,t_0,t,i)|^p\leqslant A|x_0|^p\exp\{-\alpha(t-t_0)\}.$$

特别地,当 $p=2$ 时,称方程（1）是均方指数稳定.

研究微分方程的指数稳定性,目前大部分主要是采用 Lyapunov 直接方法（也称为 Lyapunov 第二方法）,其核心在于引入一个称为 Lyapunov 函数的辅助函数 $V(t,x)$ 和它对系统的全导数 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$,然后利用 V 与 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 的性质来判断系统的解是否稳定,也即就是要找满足一定条件的正定函数 $V(x,t)$ 使得 $LV(x,t)<0$.

2　Markov 调制的奇异随机微分方程指数稳定性条件及其证明

文献[3]中就 Markov 调制的随机微分方程的指数稳定性证明了如下结论.

定理 1[3] 令 p,λ,c_1,c_2 是正数,假设存在一个函数 $V(x,t,i)\in C^{2,1}(R_0^n\times R_+\times S,R_+)$ 使得对所有的 $(x,t,i)\in R_0^n\times R_+\times S$ 有

$$c_1|x|^p\leqslant V(x,t,i)\leqslant c_2|x|^p \tag{2}$$

和

$$LV(x,t,i)\leqslant-\lambda|x|^p \tag{3}$$

那么,对所有的 $x_0\in R^n$，有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(E|x(t,x_0)|^p)\leqslant-\frac{\lambda}{c_2}$$

利用定理 1 的结论,本文构造满足下列条件的 Lyapunov 函数 $V(x,t,i)$:

$$V_x(x,t,i)=V_1(x,t,i)H$$

$$V_{xx}(x,t,i)=H^TV_2(x,t,i)H$$

其中：$V_1(x,t,i)$ 是 n 维行向量,$V_2(x,t,i)$ 是 $n\times n$ 维矩阵.

定义从 $R^n\times R_+\times S$ 到 R 的算子 L 如下：

$$LV(x,t,i)=V_t(x,t,i)+V_1(x,t,i)f(x,t,i)+\frac{1}{2}trace\left[g^T(x,t,i)V_2(x,t,i)g(x,t,i)\right]+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}V(x,t,i),$$

其中：

$$V_t(t,x,i)=\frac{\partial V(t,x,i)}{\partial t}$$

$$V_x(t,x,i)=\left(\frac{\partial V(t,x,i)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V(t,x,i)}{\partial x_n}\right)$$

$$V_{xx}(t,x,i)=\left(\frac{\partial^2V(t,x,i)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}$$

将其推广到 Markov 调制的奇异随机微分方程的情形,可以得到如下结果.

定理 2　假设存在一个正的常数 K 使得对所有的 $(x,t,i)\in R_0^n\times R_+\times S$,

$$|f(x,t,i)|\vee|g(x,t,i)|\leqslant K|x| \tag{4}$$

令 $p>0,\lambda>0$, 如果对所有的 $x_0\in R^n$, 有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(E|x(t,x_0)|^p)\leqslant-\lambda \tag{5}$$

那么

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(E|x(t,x_0)|\ )\leqslant-\frac{\lambda}{p}\quad a.s. \tag{6}$$

证明:任意给定 $x_0\in R^n$, 而且记 $x(t,x_0)=x(t)$. 令 $\varepsilon\in(0,\delta/2)$ 是任意的. 由式（5）,存在一个正的常数 M 使得

$$E|x(t)|^p\leqslant Me^{-(\lambda-\varepsilon)t},\quad t\geqslant0 \tag{7}$$

由矩阵范数的定义和性质[7] $|Ax|\leqslant|A||x|$ 及式(7),可知,存在一个正的常数 $M_1>0$,使得

$$E|Hx(t)|^p\leqslant M_1e^{-(\lambda-\varepsilon)t},\quad t\geqslant0 \tag{8}$$

令 $\delta>0$ 足够小,使得

$$(3K)^p(\delta^p+C_p\delta^{\frac{p}{2}})<\frac{1}{2} \tag{9}$$

其中常数 C_p 由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式[3]给出.令 $k=1,2,\ldots$, 即知对任意 $a,b,c\geqslant0$,

$$(a+b+c)^p\leqslant\left[3(a\vee b\vee c)\right]^p=$$

$$3^p\left(a^p\vee b^p\vee c^p\right)\leqslant3^p\left(a^p+^p+c^p\right)$$

从而可得

$$E\left[\sup_{(k-1)\delta\leqslant t\leqslant k\delta}|Hx(t)|^p\right]\leqslant3^pE|Hx(t)|^p+3^pE\left(\int_{(k-1)\delta}^{k\delta}|f(x(s),s,r(s))|ds\right)^p+3^pE\left[\sup_{(k-1)\delta\leqslant t\leqslant k\delta}\left|\int_{(k-1)\delta}^{t}g(x(s),s,r(s))d\omega(s)\right|^p\right] \tag{10}$$

由式（8）得

$$E|Hx((k-1)\delta)|^p\leqslant M_1e^{-(\lambda-\varepsilon)(k-1)\delta} \tag{11}$$

再利用式（4）计算

$$E\left(\int_{(k-1)\delta}^{k\delta}|f(x(s),s,r(s))|ds\right)^p\leqslant$$

$$E\left(\delta\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|f(x(s),s,r(s))|\right)^p\leqslant$$

$$(k\delta)^p E\left[\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|x(s)|^p\right] \tag{12}$$

和

$$E\left(\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}\left|\int_{(k-1)\delta}^{s} g(x(s),s,r(s))\,d\omega(s)\right|\right)^p \leqslant$$

$$C_p E\left(\int_{(k-1)\delta}^{k\delta}|g(x(s),s,r(s))|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant$$

$$C_p E\left(\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|g(x(s),s,r(s))|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant$$

$$C_p K^p \delta^{\frac{p}{2}} E\left[\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|x(s)|^p\right] \tag{13}$$

将式(11)—式(13)代入式(10)得

$$E\left(\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|Hx(t)|^p\right) \leqslant M_1 3^p e^{-(\lambda-\varepsilon)(k-1)\delta} +$$

$$(3K)^p(\delta^p + C_p\delta^{\frac{p}{2}})E\left(\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|x(t)|^p\right)$$

利用式(9)得

$$E\left(\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|Hx(t)|^p\right) \leqslant 2M_1 3^p e^{-(\lambda-\varepsilon)(k-1)\delta} \tag{14}$$

从而有

$$E\left(\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|x(t)|^p\right) \leqslant \frac{2M_1 3^p e^{-(\lambda-\varepsilon)(k-1)\delta}}{|H|^p} \tag{15}$$

由 Chebyshev 不等式有

$$P\left\{\omega: \sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|x(t)|^p > e^{-(\lambda-2\varepsilon)(k-1)\delta}\right\} \leqslant \frac{E\sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|x(t)|^p}{e^{-(\lambda-2\varepsilon)(k-1)\delta}} \leqslant$$

$$\frac{2M_1 3^p e^{-(\lambda-\varepsilon)(k-1)\delta}}{|H|^p e^{-(\lambda-2\varepsilon)(k-1)\delta}} = \frac{2M_1 3^p e^{-\varepsilon(k-1)\delta}}{|H|^p}$$

因此

$$P\left\{\omega: \sup_{(k-1)\delta\leqslant s\leqslant k\delta}|x(t)| > e^{-(\lambda-2\varepsilon)(k-1)\delta/p}\right\} \leqslant$$

$$\frac{2M_1 3^p e^{-\varepsilon(k-1)\delta}}{|H|^p} \tag{16}$$

利用 Borel-Cantelli 引理,除了对有限多个 k 之外,几乎对所有 ω,

$$\sup_{(k-1)\delta\leqslant t\leqslant k\delta}|x(t)| \leqslant e^{-(\lambda-2\varepsilon)(k-1)\delta/p} \tag{17}$$

成立. 因此,存在一个 $k_0(\omega)$ 对所有 $\omega\in\Omega$(除了一个零测集),当 $k \geqslant k_0$ 时,式(17)成立.结果,对几乎所有 $\omega\in\Omega$,

$$\frac{1}{t}\log(|x(t)|) \leqslant -\frac{(\lambda-2\varepsilon)(k-1)\delta}{pt} \leqslant -\frac{(\lambda-2\varepsilon)(k-1)}{pk}.$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(|x(t)|) \leqslant -\frac{(\lambda-2\varepsilon)}{p} \qquad a.s.$$

令 $\varepsilon\to 0$,得式(6). 结论得证.

上述定理 2 表明,在条件式(4)下,方程(1)的 p 阶指数稳定包含几乎必然指数稳定.

通过定理 2,可以将随机微分方程的指数稳定性推广到一般化,特别地,当奇异矩阵变为非奇异矩阵时,在方程两边同时乘以其逆矩阵,就是大多数稳定性研究中的主要研究对象.此外,Lyapunov 函数研究稳定性的这一理论与方法,已经渗透到应用数学、力学、控制与系统理论、金融系统、生态系统、神经网络系统等众多领域,取得了巨大的发展,形成了从理论到应用的丰富体系.

参 考 文 献:

[1] Gorelova E Ya. Stability of singular perturbed stochastic systems[J]. Automation and Remote Control,1997(7):58—67.

[2] Liu Xinzhi,Shen Xuemin ,Zhang Yi. Exponential stability of singular perturbed systems with time delay [J]. Applicable Analysis,2003,82:117—130.

[3] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations with markovian switching[J]. Stoch Proc Aappl, 1999, 79: 45— 67.

[4] Yuan Chenggui, Mao Xuerong. Asymptotic stability in distribution of stochastic differential equations with markovian switching[J].Stoch Proc Appl,2003,103:277—291.

[5] Joao B R do Val,Cristiane Nespoli,Yusef R Z Caceres. Stochastic stability for Markovian jump linear systems associated with a finite number of jump times[J]. Math Anal Appl, 2003,285: 551—563.

[6] Kolmanovskii V,Koroleva N,Maizenberg T, et al. Neutral stochastic differential equations with markovian switching[J]. Stochastic Analysis and Application,2003, 21(4):819—847, .

[7] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析[M]. 第 3 版. 武汉: 华中理工大学出版社,1986:270—276.