



双模光场与原子共振拉曼相互作用中的纠缠特性

李燕丽

(天津科技大学理学院, 天津 300457)

摘要: 在二能级原子静止和运动的情况下,研究了原子与双模压缩真空态量子化腔场共振拉曼过程中的纠缠特性,利用量子化熵和量子相对熵分别讨论了原子与双模光场之间以及双模光场两模之间的纠缠性质.研究发现:通过适当改变场模参量和原子初态可以控制纠缠的时间和纠缠强度演化.

关键词: 共振拉曼作用; 量子纠缠; 量子约化熵; 量子相对熵

中图分类号: O 431.2

文献标识码: A

文章编号: 1672-6510 (2007) 01-0063-04

The Quantum Entanglement Property of the Atom Interacting with the Optical Field Through Resonance Raman Process

LI Yan-li

(College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China)

Abstract: For the case that a two-level atom is moving or still, entanglement is studied in the interaction system of two-mode squeezing vacuum state interacting with the two-level atom by two-photon resonance Raman process. The entanglement properties between the two-mode field and the atom and that between the two modes of the field are respectively investigated by using the quantum reduced entropy and the quantum relative entropy. It is discovered that entanglement time and degree can be controlled through changing the parameter of the two mode field and the initial condition of the atom.

Keywords: resonance Raman process; quantum entanglement; quantum reduced entropy; quantum relative entropy

量子纠缠在量子信息理论中占有举足轻重的地位,其在密钥分配^[1]、量子隐形传送^[2]、量子编码及纠错^[3]等方面扮演着不可或缺的角色.原子与光场相互作用体系中的非经典特性以及纠缠性质始终是热点话题之一^[4,5].本文讨论一个二能级原子与双模量子化的腔场发生双光子共振拉曼相互作用过程中的纠缠特性,并重点研究原子状态和场模参数的变化对纠缠特性的影响.

1 理论模型

原子与双模腔场共振拉曼相互作用模型为^[4]:处于高 Q 腔内的原子具有两个非简并能级 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$, 通过虚能级 $|J\rangle$ 与双模光场发生拉曼相互作用,并且 $\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$, 在旋波近似下,原子与双模腔场系统在

上述过程中的哈密顿量可表示为(取 $\hbar=1$)

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z + H_I \quad (1)$$

$$H_I = g f_{(\zeta)} (a_1 a_2^\dagger \sigma^+ + a_2 a_1^\dagger \sigma^-) \quad (2)$$

其中 g 是腔场和原子的拉曼耦合常量, $f_{(\zeta)}$ 为场模形式函数, a_j, a_j^\dagger ($j=1,2$) 分别为模 j 腔场的光子产生和湮灭算符, σ_z 为描述原子的赝自旋算符, $\sigma_z = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$, $\sigma^+ = |+\rangle\langle-|$ 和 $\sigma^- = |-\rangle\langle+|$ 分别为原子的反转和跃迁算符.在目前的腔量子电动力学实验中^[6], 采用让一原子束沿轴向通过矩形或圆柱形腔场而与不同的模场发生相互作用的方法,考察场与原子耦合而产生的各种量子效应.该系统在实验上是可能实现的.假定在 $t=0$ 时原子进入腔内,经过 P 个半波长后离开腔.因为原子沿 Z 轴运动,故只需考虑场模形式函

数对 Z 轴的依赖关系,原子的运动可以具体化为 $f_{(z)} \rightarrow f_{(vt)}$, 这里 v 为原子的运动速度,为具体讨论方便,定义 TEM_{mp} 模为 $f_{(z)} = \sin\left(\frac{p\pi vt}{L}\right)$ 式中 P 表示长为 L 的腔中模的半波数.选择系统的初始状态如下:初始时刻腔场处于双模压缩真空态

$$|\varphi(0)\rangle_F = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh^n r) |n, n\rangle_{ab} \quad (3)$$

原子处于激发态 $|+\rangle$ 和基态 $|-\rangle$ 的相干叠加态

$$|\psi(0)\rangle_a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp(i\varphi)|-\rangle \quad (4)$$

其中 θ 反应原子两能级间的激发程度, φ 反应能级间的位相关系.为简单起见,只考虑共振的情况,并假定在 $t=0$ 时原子进入腔内,经过 P 个半波长后离开腔.在相互作用绘景中系统的时间演化算符

$$U_{I(t)} = \exp\left[-i \int_0^t H_I dt'\right] \quad (5)$$

在二能级原子本征态矢集 $|e\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $|g\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 表象中,时间演化算符可表示为

$$U_{I(t)} = \begin{bmatrix} \cos\left[\sqrt{a_1 a_1^+ a_2^+ a_2} g \theta(t)\right] & & & \\ -i \sin\left[\sqrt{a_2 a_2^+ a_1^+ a_1} g \theta(t)\right] & a_2 a_1^+ & & \\ \frac{-i \sin\left[\sqrt{a_1 a_1^+ a_2^+ a_2} g \theta(t)\right]}{\sqrt{a_1 a_1^+ a_2^+ a_2}} & & a_1 a_2^+ & \\ \cos\left[\sqrt{a_2 a_2^+ a_1^+ a_1} g \theta(t)\right] & & & \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中

$$\theta(t) = \int_0^t f(vt') dt' = \left(\frac{L}{p v \pi}\right) \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{p v \pi t}{L}\right)\right] \quad (7)$$

选择原子速度 $v = \frac{g L}{\pi}$, $\theta(t)$ 变为 $\theta(t) = [1 - \cos(pgt)] / pg$, 则初始时刻系统的态矢为

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_a \otimes |\psi(0)\rangle_f \quad (8)$$

经过推导得到任意时刻系统的态矢为

$$|\psi(t)\rangle = U_I(t) |\psi(0)\rangle = |c(t)\rangle|e\rangle + |s(t)\rangle|g\rangle \quad (9)$$

$$|c(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\frac{\theta}{2} f_n \cos\left[\sqrt{n(n+1)} g \theta(t)\right] |n, n\rangle - \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} i \sin\frac{\theta}{2} f_n \sin\left[\sqrt{n(n+1)} g \theta(t)\right] \exp(i\varphi) |n-1, n+1\rangle \right) |s(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-i \cos\frac{\theta}{2} f_n \sin\left[\sqrt{n(n+1)} g \theta(t)\right] |n+1, n-1\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{\theta}{2} f_n \cos\left[\sqrt{n(n+1)} g \theta(t)\right] \exp(i\varphi) |n, n\rangle \right) \quad (10)$$

利用式(10)可得在任意时刻 t 系统的密度算符

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} |c(t)\rangle\langle c(t)| & |c(t)\rangle\langle s(t)| \\ |s(t)\rangle\langle c(t)| & |s(t)\rangle\langle s(t)| \end{bmatrix} \quad (11)$$

根据式(11)可得腔场的约化密度算符为

$$\rho_f(t) = |c(t)\rangle\langle c(t)| + |s(t)\rangle\langle s(t)| \quad (12)$$

它的本征值为

$$\begin{aligned} \pi_f^{\pm} &= \langle c(t)|c(t)\rangle \pm \exp(\mp\alpha) \langle c(t)|s(t)\rangle \\ &= \langle s(t)|s(t)\rangle \pm \exp(\mp\alpha) \langle c(t)|s(t)\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

同样可得原子的约化密度矩阵

$$\rho_a(t) = \begin{bmatrix} |c(t)\rangle\langle c(t)| & |s(t)\rangle\langle c(t)| \\ |c(t)\rangle\langle s(t)| & |s(t)\rangle\langle s(t)| \end{bmatrix} \quad (14)$$

可以证明原子约化密度算符的本征值与双模光场约化密度算符的本征值具有相同的表示式,即 $\pi_a^{\pm} = \pi_f^{\pm}$. 接下来运用得到的态矢计算原子与双模光场之间以及光场的两模之间的纠缠.

2 双模光场与原子的纠缠

由哈密顿量描述的量子动力学导致了双模压缩真空场与原子之间的纠缠,由于本文所选系统的初态条件保证了由双模光场和原子组成的全系统在相互作用过程中始终保持为纯态,因此可以用量子约化熵作为纠缠的度量.原子或双模光场间的熵反映了原子、双模光场间的纠缠程度,熵越大,纠缠度越大^[7].其定义可以根据各自的密度矩阵表示为, $S_j(t) = -\text{Tr}_j(\rho_j \log_2 \rho_j)$, j 表示原子或双模光场.对于初态时刻原子与腔场处于纯态并退耦合的情况,根据熵的三角不等式^[8]: $|S_f(t) - S_a(t)| \leq S(t) \leq |S_f(t) + S_a(t)|$ 或 Schmidt 分解定理知两子系的约化熵相等,即 $S_f(t) = S_a(t)$.这里仅计算腔场的约化熵.

用场(或原子)约化密度矩阵的本征值,场(或原子)的约化熵可以表示为

$$S_f(t) = S_a(t) = -\{\pi_f^+(t) \ln(\pi_f^+(t)) + \pi_f^-(t) \ln(\pi_f^-(t))\}$$

π_f^\pm 为在任意时刻 t 腔场的约化密度算符的本征值.利用以上结果可讨论双光子共振拉曼相互作用过程中原子运动和场模结构对场和原子之间的纠缠影响.图 1 为不考虑原子运动时场与原子间纠缠度的数值计算结果.图中 gt 是时间标度,指光场与原子的拉曼耦合常数与时间 t 的乘积.

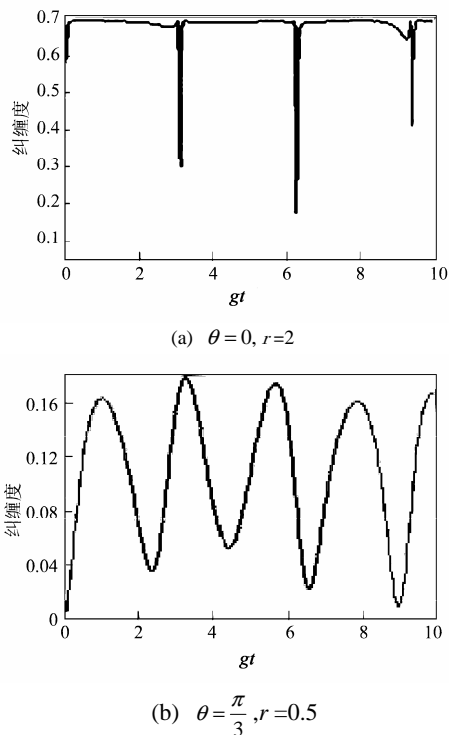


图1 不考虑原子运动时场与原子间纠缠度随时间演化

Fig.1 Change of entanglement of two mode field with an atom along with time not considering the motion of an atom

结论:(1)随着压缩因子 r 和 θ 变化时,纠缠度的演化周期性表现得不是很明显.(2)原子初态和压缩因子对场-原子纠缠和双模光场的模间纠缠有很大影响,只有增大压缩因子 r 同时降低 θ 才能保持双模光场和原子间高度纠缠.

图 2 为原子运动时场和原子间纠缠度的数值计算结果.

结论:(1)、场-原子纠缠和模间纠缠的纠缠度演化发生周期性的变化,周期为 π/p .它不随压缩参量和原子的初态变化而改变.(2)当压缩因子 r 逐渐变大而参数 p 值较小,场-原子纠缠保持纠缠极大值的时间变长,当原子静止时结论与之相同,这对于量子通讯具有很大实际意义.(3)双模光场和原子在 $gt=n\pi/p$ 时退纠缠,在其他时刻,双模光场和原子纠缠,当 r 较小而 $p>1$ 时在 $gt=n\pi/2p$ 时,双模光场和原子纠缠达到极大.这与场-原子纠缠度的演化规律正好相反.双模光场模间纠缠

度的极大值在场-原子退纠缠时取得.(4)给定原子初态为激发态时,场-原子纠缠度随压缩因子 r 的增大而增大,压缩因子 r 较小时,随着参数 p 的增大,场-原子纠缠的极大值减小,压缩因子 r 较大时,场-原子纠缠的

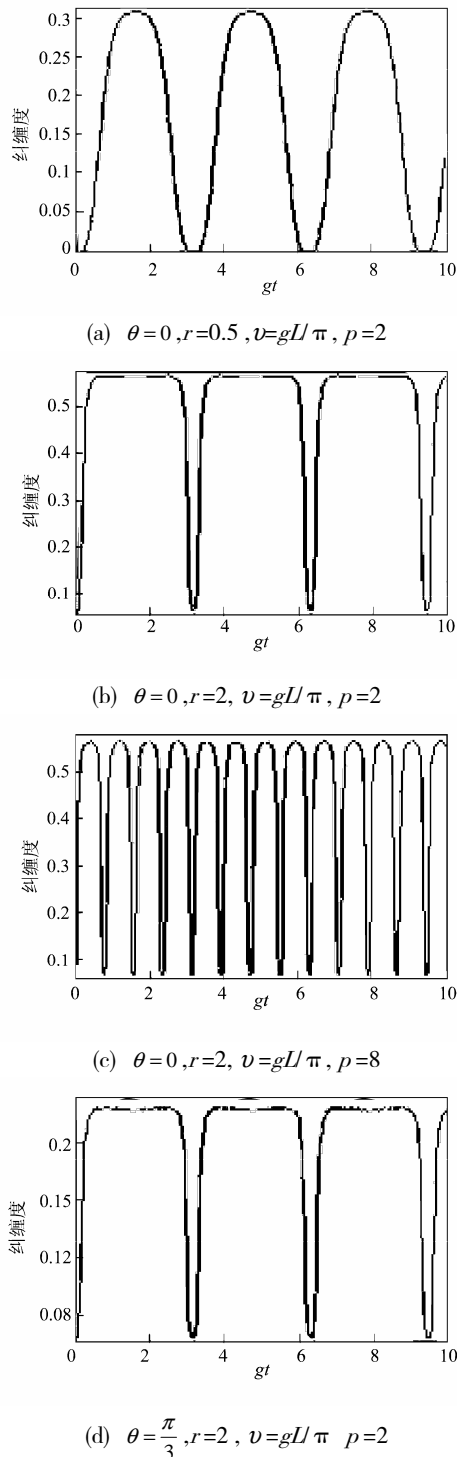


图2 考虑原子运动时场与原子间纠缠度随时间演化

Fig.2 Change of entanglement of two mode field with an atom along with time considering the motion of an atom

极大值趋于稳定,但随着参数 p 的增大,保持纠缠极大值的时间缩短.(5)给定压缩因子,原子初态的变化 (θ 变大)光场和原子纠缠的最大值降低.

3 双模光场的模间纠缠

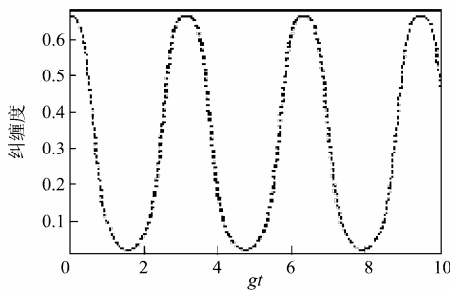
用量子相对熵理论^[9]可以算出腔场的模间纠缠为

$$E_R(\rho_F) = -\sum_n a_{nn} \ln a_{nn} + \pi^+ \ln \pi^+ + \pi^- \ln \pi^-$$

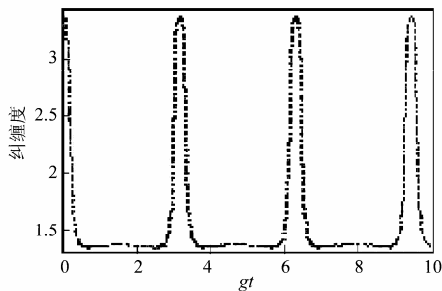
其中 $a_{nn} = f_n^2 \cos[\sqrt{n(n+1)}gt]$.

图 3 虚线为原子运动时双模光场两模间量子相对熵纠缠度的数值计算结果.

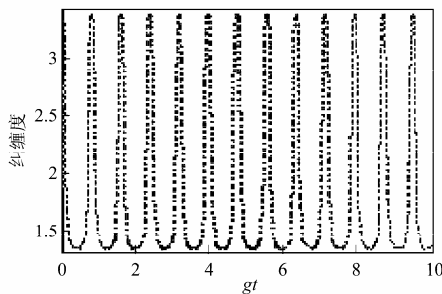
结论:双模光场两模间纠缠度的演化具有周期性,且模间纠缠的周期与场-原子的纠缠周期相同,同时模间纠缠与场-原子纠缠度的演化规律正好相反.



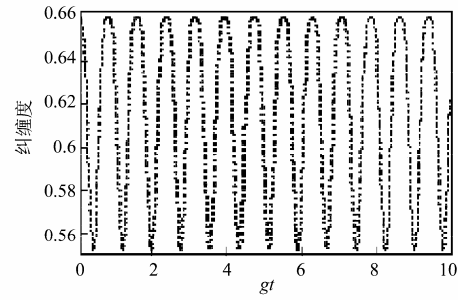
(a) $\theta = 0, r = 0.5, v = gL/\pi, p = 2$



(b) $\theta = 0, r = 2, v = gL/\pi, p = 2$



(c) $\theta = 0, r = 2, v = gL/\pi, p = 8$



(d) $\theta = \frac{\pi}{3}, r = 2, v = gL/\pi, p = 8$

图3 考虑原子运动时双模光场两模间纠缠度随时间演化

Fig.3 Change of entanglement of two mode field along with time considering the motion of an atom

4 结 语

分别运用量子约化熵和量子相对熵,研究了双模压缩真空场与二能级原子发生双光子共振拉曼相互作用时的量子纠缠性质,通过分析原子运动和不运动两种情况得出如下结论:场-原子纠缠和模间纠缠的演化规律有相反的趋势,通过适当改变场模参量和原子初态可以控制纠缠强度和时间的演化,从而对量子通讯有很好的指导意义.

参 考 文 献:

- [1] Ekert A. Quantum cryptography based on Bell's theorem [J]. Phys Rev Lett, 1991, 67 (5-6): 661—663.
- [2] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, et al. Experimental quantum teleportation [J]. Nature, 1997, 390: 575—579.
- [3] Steane A M. Error correcting codes in quantum theory [J]. Phys Rev Lett, 1996, (77): 793—797.
- [4] 张桂明, 李悦科, 高云峰. 非等同双原子与双模场拉曼相互作用模型的腔场谱 [J]. 物理学报, 2004, 53(11): 3739—3743
- [5] 方曙东, 曹卓良. 大失谐条件下纠缠原子与光场相互作用过程中的原子特性 [J]. 合肥工业大学学报, 2005, 28(12): 1614—1617.
- [6] Meschede D, Walther H, Mueller G. one-atom maser [J]. Phys Rev Lett, 1985, 54(6): 551—554.
- [7] 敖胜美, 周石伦, 曾高坚. 非简并拉曼过程中交流斯塔克位移对场熵和缠绕的影响 [J]. 物理学报, 2001, 50(1): 52—57.
- [8] Araki H, Lieb E. Entropy inequalities [J]. Commun Math Phys, 1970, 18(2): 160—170.
- [9] Rains E. Bound on distillable entanglement [J]. Phys Rev A, 1999, 60(1): 179—184.