第 23 卷 第 3 期
2008 年 9 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.23 No. 3
Sep. 2008

矩形网格节点上的插值函数

吴天毅
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘 要：构造矩形网格节点上的插值函数是工程设计中经常遇到的问题,插值函数的性质对工程设计质量有着重大影响. 本文通过建立一系列基函数,构造出了两个在具有 $(n+1)^2$ 个节点的矩形网格的插值函数,这两个插值函数不仅是初等函数,且具有良好的光滑性,简单易用.

关键词：矩形；插值；误差

中图分类号：O241.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6510（2008）03-0083-04

Interpolating Function on the Nodes of Rectangle Net

WU Tian-yi
（College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China）

Abstract：Interpolating functions on the nodes of rectangle net is the topic during the engineering designing. Its characteristic has very important effect on the engineering project. Through establishing a series of primary function, two interpolating functions on the nodes of rectangle net have been established. The two functions are elementary functions and they are smooth, oversimplified and easy to use.

Keywords：rectangle；interpolation；error

设 D 为直线 $x=x_i\left(i=1,2,\cdots,n+1\right)$，$y=y_j(j=1,2,\cdots,n+1)$ 构成的 xoy 平面上的矩形网格，$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$，$y_1<y_2<\cdots<y_{n+1}$. D 的边界为 $x=x_1$，$x=x_{n+1}$，$y=y_1$，$y=y_{n+1}$. 给定函数 $f\left(x,y\right)$ 在矩形网格 D 的节点处的函数值

$$f\left(x_i,y_j\right)=f_{ij}\quad\left(i,j=1,2,\cdots,n+1\right)\tag{1}$$

现求一个二元初等函数 $g\left(x,y\right)$ 使其满足

$$g\left(x_i,y_j\right)=f_{ij}\quad\left(i,j=1,2,\cdots,n+1\right)\tag{2}$$

以上插值问题称为矩形网格节点的插值问题,关于这一插值问题已有一些结果,但多数结果都是在一个只有 4 个节点的小矩形上讨论的,给出的只是在这个小矩形上的插值表达[1]. 本文的工作是直接构造出了两种在具有 $(n+1)^2$ 个节点的矩形网格 D 上的插值函数,并给出了它们的误差设计.

定理 1 满足插值问题条件（2）的二元初等插值函数 $g\left(x,y\right)$ 可取为

$$g\left(x,y\right)=\sum_{i,j=1}^{n}W_{ij}\left(x,y\right)f_{ij}\tag{3}$$

式中 $W_{ij}\left(x,y\right)=P_i\left(x\right)q_j\left(y\right)\quad\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$

$$P_i\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\left(x-x_{i-1}\right)^2}-\sqrt{\left(x-x_i\right)^2}}{x_i-x_{i-1}}+\frac{\sqrt{\left(x-x_{i+1}\right)^2}-\sqrt{\left(x-x_i\right)^2}}{x_{i+1}-x_i}\right]\tag{4}$$

$$q_j\left(y\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\left(y-y_{j-1}\right)^2}-\sqrt{\left(y-y_j\right)^2}}{y_j-y_{j-1}}+\frac{\sqrt{\left(y-y_{j+1}\right)^2}-\sqrt{\left(y-y_j\right)^2}}{y_{j+1}-y_j}\right]\tag{5}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n)$$

证明：由式（4）、（5）知

收稿日期：2007–12–07；**修回日期**：2008–03–12
作者简介：吴天毅（1955—），男，广东潮安人，教授.

$$P_i(x)=\begin{cases}1 & x=x_i\\ 0 & x=x_k\left(k\neq i\quad 1\leqslant k\leqslant n+1\right)\end{cases}$$

$$q_j(x)=\begin{cases}1 & y=y_j\\ 0 & y=y_k\left(k\neq i\quad 1\leqslant k\leqslant n+1\right)\end{cases}$$

（$i,j=1,2,\cdots,n$）

从而

$$W_{ij}(x,y)=P_i(x)q_j(y)=\begin{cases}1 & (x,y)=(x_i,y_j)\\ 0 & 其他\end{cases}$$

令 $$g(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}W_{ij}(x,y)f_{ij}$$

显然 $g(x,y)$ 满足插值条件（2）. 又由式（4）、（5）可知，$P_i(x)$，$q_j(y)$（$i,j=1,2,\cdots,n$）均是 $(-\infty,+\infty)$ 内初等函数，因此 $W_{ij}(x,y)$（$i,j=1,2,\cdots,n$）也是初等函数，从而知 $g(x,y)$ 是初等函数.

定理 2 如果函数 $f(x,y)$ 有直到四阶偏导数存在，记

$$M_2=\max_{\substack{x_1\leqslant x\leqslant x_{n+1}\\ y_1\leqslant y\leqslant y_{n+1}}}\left\{\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|\right\}$$

$$M_4=\max_{\substack{x_1\leqslant x\leqslant x_{n+1}\\ y_1\leqslant y\leqslant y_{n+1}}}\left\{\left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right|\right\}$$

$$h=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left\{\left|x_{i+1}-x_i\right|,\left|y_{j+1}-y_j\right|\right\} \tag{6}$$

那么式（3）定义的插值函数 $g(x,y)$ 的截断误差 $R(x,y)$ 满足

$$\left|R(x,y)\right|\leqslant\frac{h^2}{4}M_2+\frac{h^4}{64}M_4$$

（$x_1\leqslant x\leqslant x_{n+1},y_1\leqslant y\leqslant y_{n+1}$）

证明： 由式（4）、（5）知

$$P_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$q_j(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j-1}}{y_j-x_{j-1}} & y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_j\\ \dfrac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j} & y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$W_{ij}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x_{i+1}-x)(y-y_{j-1})}{(x_{i+1}-x_i)(y_j-y_{j-1})} & (x,y)\in D_1\\ \dfrac{(x_{i+1}-x)(y_{j+1}-y)}{(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)} & (x,y)\in D_2\\ \dfrac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y)}{(x_i-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)} & (x,y)\in D_3\\ \dfrac{(x-x_{i-1})(y-y_{j-1})}{(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})} & (x,y)\in D_4\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

由式（7）知在小矩形域 $\{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_j\}=D_{(i-1,j-1)}$ 上只有 $W_{i-1,j-1}(x,y)$，$W_{i-1,j}(x,y)$，$W_{i,j-1}(x,y)$，$W_{i,j}(x,y)$ 不为 0. 故

$$g(x,y)=W_{i-1,j-1}(x,y)f_{i-1,j-1}+W_{i-1,j}(x,y)f_{i-1,j}+W_{i,j-1}(x,y)f_{i,j-1}+W_{ij}(x,y)f_{i,j}$$

$$(x,y)\in D_{(i-1,j-1)} \tag{8}$$

由式（7）及式（8）知 $g(x,y)$ 在每一小矩形区域 $D_{(i-1,j-1)}$ 上都是双线性 $(a+bx+cy+dxy)$ 函数. 由文献[1]知 $D_{(i-1,j-1)}$ 上的双线性插值函数是唯一的，它实际上相当于先对 x 进行线性插值，然后再对 y 进行线性插值而成. 记 $R_x(x,y)$，$R_y(x,y)$ 为分别对 x，y 插值的截断误差，$R_{xy}(x,y)$ 为对 x 插值后又对 y 插值的截断误差，由参考文献[2]知在 $D_{(i-1,j-1)}$ 上

$$R_x(x,y)=\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2}\frac{\partial^2 f(x,\eta)}{\partial x^2}$$

$$R_y(x,y)=\frac{(y-y_{j-1})(y-y_j)}{2}\frac{\partial^2 f(y,\eta)}{\partial y^2}$$

$$R_{x,y}=\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2!}R_y\left[\frac{\partial^2 f(x,\eta)}{\partial x^2}\right]=\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(y-y_{j-1})(y-y_j)}{(2!)^2}\frac{\partial^4 f(\varepsilon_1,\eta_1)}{\partial x^2\partial y^2}$$

故 $$\left|R(x,y)\right|\leqslant\frac{M_2(i-1,j-1)^2}{4}h^2(i-1,j-1)+\frac{M_4(i-1,j-1)^2}{64}h^4(i-1,j-1)$$

$(x,y)\in D_{(i-1,j-1)}$

式中

$$M_2(i-1,j-1)=\max_{D_{(i-1,j-1)}}\left\{\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|\right\}$$

$$M_4(i-1,j-1)=\max_{D_{(i-1,j-1)}}\left\{\left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right|\right\}$$

$$h(i-1,j-1)=\max\left\{\left|x_i-x_{i-1}\right|,\left|y_j-y_{j-1}\right|\right\}$$

从而有　$R(x,y)\leqslant\frac{h^2}{4}M_2+\frac{h^4}{64}M_4$

其中 M_2，M_4，h 如式（6）所定义.

由式（3）可知，定理 1 构造的二元插值函数简单、易计算，但在节点处偏导数不存在，此为一缺陷. 本文下面构造的第二种二元初等插值函数将克服这一缺陷.

定理 3 满足插值条件（2）且处处偏导数存在的二元初等插值函数 $g(x,y)$ 可取为

$$g(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}f_{ij}$$

式中　$V_{ij}(x,y)=S_i(x)t_j(y)$

$$S_i(x)=\frac{1}{16}\left[\frac{(x_{i+1}-x_{i-1})^2-\left(\sqrt{(x-x_{i-1})^2}-\sqrt{(x-x_{i+1})^2}\right)^2}{(x_{i+1}-x_i)(x_i-x_{i-1})}\right]^2 \tag{9}$$

$$t_j(y)=\frac{1}{16}\left[\frac{(y_{j+1}-y_{j-1})^2-\left(\sqrt{(y-y_{j-1})^2}-\sqrt{(y-y_{j+1})^2}\right)^2}{(y_{j+1}-y_j)(y_j-y_{j-1})}\right]^2 \tag{10}$$

$(i,j=1,2,\cdots,n)$

证明： 由式（9）知

$$S_i(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(x_{i+1}-x)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_i-x_{i-1})}\right]^2 & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_{i+1}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

显然　$S_i(x_k)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq j,1\leqslant k\leqslant n+1\end{cases}$

$$S_k'(x_k)=\begin{cases}0 & k\neq i,1\leqslant k\leqslant n+1\\ \dfrac{1}{x_i-x_{i-1}}-\dfrac{1}{x_{i+1}-x_i} & k=i\end{cases} \tag{11}$$

故 $S_i(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导 $(i=1,2,\cdots,n)$

由式（10）知

$$t_j(y)=\begin{cases}\left[\dfrac{(y_{j+1}-y)(y-y_{j-1})}{(y_{j+1}-y_j)(y_j-y_{j-1})}\right]^2 & y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_{j+1}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

显然

$$t_j(y_k)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i,1\leqslant k\leqslant n+1\end{cases}$$

$$t_j'(y_k)=\begin{cases}0 & k\neq i,1\leqslant k\leqslant n+1\\ \dfrac{1}{y_j-y_{j-1}}-\dfrac{1}{y_{j+1}-y_j} & k=i\end{cases} \tag{12}$$

故 $t_j(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导 $(j=1,2,\cdots,n)$.

从而知

$$V_{ij}(x,y)=S_i(x)t_j(y)=\begin{cases}1 & (x,y)=(x_i,y_j)\\ 0 & 其他节点处\end{cases}$$

且在 xoy 面内处处偏导存在.

令 $g(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}(x,y)f_{ij}$，由 $V_{ij}(x,y)$ 的性质可知 $g(x,y)$ 满足插值条件（2），且处处偏导存在.

事实上由 $S_i(x)$、$t_j(y)$ 的可导性，不仅可推知 $V_{ij}(x,y)$ 的一阶偏导存在，而且可知 $V_{ij}(x,y)$ 的二阶混合偏导也存在，即

$$\frac{\partial^2 V_{ij}(x,y)}{\partial x\partial y}=S_i'(x)t_j'(y)$$

从而可知定理 3 构造的插值函数 $g(x,y)$ 的二阶混合偏导存在.

特别当 $x_{i+1}-x_i=h_x\,(i=1,2,\cdots,n)$，$y_{j+1}-y_j=h_y\,(j=1,2,\cdots,n)$ 时，由式（11）和式（12）可知，$S_i'(x_k)=0,\ t_j'(y_k)=0,\ (k=1,2,\cdots,n+1;i,j=1,2,\cdots,n)$，从而知 $V_{ij}(x,y)$ 在每个节点 (x_k,y_l) 处的一阶偏导均为 $0\,(k,l=1,2,\cdots,n+1;i,j=1,2,\cdots,n)$，因此定理 3 构造的插值函数 $g(x,y)$ 在每个节点 $(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots,n+1)$ 处的一阶偏导数值均为 0，此说明 $g(x,y)$ 在每个节点处均有水平切平面.

仿照定理 2 证明中的分析，可知定理 3 定义的插值函数 $g(x,y)$ 在小矩形区域 $D_{(i-1,j-1)}$ 上是双四次多项式 $\left(g(x,y)=\sum_{i,j=0}^{4}a_{ij}x^iy^j\right)$，类似定理 2 的证明可得到下面误差估计.

定理 4 如果函数 $f(x,y)$ 有直到十阶偏导数存在，记

$$M_5=\max_{\substack{x_1\leqslant x\leqslant x_{n+1}\\ y_1\leqslant y\leqslant y_{n+1}}}\left\{\left|\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x^5}\right|,\left|\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial y^5}\right|\right\}$$

$$M_{10}=\max_{\substack{x_1\leqslant x\leqslant x_{n+1}\\ y_1\leqslant y\leqslant y_{n+1}}}\left|\frac{\partial^{10} f(x,y)}{\partial x^5 y^5}\right|$$

$$h=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left\{\left|x_{i+1}-x_i\right|,\left|y_{j+1}-y_j\right|\right\}$$

那么由定理 3 得知，插值函数 $g(x,y)$ 的截断误差 $g(x,y)$ 满足

$$\left|R(x,y)\leqslant\frac{h^5}{60}M_5+\frac{h^{10}}{57600}M_{10}\right|$$

参 考 文 献：

［1］ 李岳生. 数值逼近［M］. 北京：人民教育出版社，1978：360—379.
［2］ 冯 康. 数值计算方法［M］. 北京：国防工业出版社，1978：1—19.
［3］ 胡伟安. 插值方法［M］. 南京：河海大学出版社，2000：112—120.
［4］ 李化军.平面插值函数的研究［J］. 应用数学,2003（3）：43—45.
［5］ 刘 诚. Alphabet 算法的分析［J］. 数值计算与计算机应用, 2001, 33（1）：70—80.
［6］ 吴天毅. 分枝函数的初等表达式［J］. 工科数学，1992（4）：18—22.

（上接第 44 页）

研究表明：当施胶量为 0.3%时，使用同一种施胶剂，用针叶木浆抄出的纸张的施胶度最低，而用阔叶木浆以及混合浆抄出的纸张的施胶度随着所用施胶剂的不同而互有高低（如 3#、4#施胶剂对阔叶木浆施胶效果好，2#、3#施胶剂则对混合浆施胶效果更好）. 用阳离子壳聚糖乳化AKD后，乳液粒子表面有大量的葡萄糖胺单元，和纤维表面羟基有较好的吸附作用. 阔叶木浆与针叶木浆相比，纤维相对细小，具有更大的比表面积，所以纤维表面吸附更多的AKD乳液粒子，致使用阔叶木浆抄出的纸张的施胶度比用针叶木浆抄出的纸张的施胶度要高.

3 结 语

在一定条件下，通过水溶性壳聚糖与 AM 和 DMC 接枝共聚制得了阳离子壳聚糖衍生物. 将其用于乳化 AKD，制备出一种新型的阳离子壳聚糖 AKD 胶. 使用此 AKD 胶对针叶木浆、阔叶木浆和混合浆进行施胶，可以在中性条件下抄纸，成纸施胶度达到较好的效果. 阳离子壳聚糖AKD胶比一般AKD胶的施胶度高，主要是因为壳聚糖与AKD对纸张都有施胶效果. 在施胶度与熟化时间上，3#AKD乳液与4#AKD乳液大致相符.

参 考 文 献：

［1］ 杨 燕，王志杰，戴忠国. 中性施胶剂 AKD 和 ASA［J］. 西南造纸，2002，4：31—32.
［2］ 刘永顺，王 保，王 辉. 改性 AKD 用于胶版印刷纸表面施胶［J］. 纸和造纸，2007，26（5）：45—46.
［3］ 仲述春. 中性施胶剂AKD使用的一些问题［J］. 纸和造纸，2006，25（4）：15—16.
［4］ 肖 辉. 自留着型中性施胶剂在薄页纸中的应用研究［J］. 黑龙江造纸，2006，34（2）：48—49.
［5］ 张革仓，邵学军. AKD中性／碱性施胶的影响因素［J］. 纸和造纸，2002，3：45—47.
［6］ 沈一丁. 造纸化学品的制备和作用机理［M］. 北京：中国轻工业出版社，1998：99—105.