第 23 卷 第 3 期
2008 年 9 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.23 No. 3
Sep. 2008

两个矩阵同时化为 Hermite 标准型的一个充分必要条件

崔家峰，张 励
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘 要：利用单纯的矩阵方法得到，两个同型矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 能够同时化为 Hermite 标准型的一个充分必要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$．在此基础上，若同型矩阵序列 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots,\boldsymbol{A}_t$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_t)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_1+\cdots+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_t$，则对任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j\,(i\neq j)$ 均可以同时化为 Hermite 标准型.

关键词：矩阵；Hermite 标准型；可逆矩阵
中图分类号：O151.21 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6510（2008）03-0080-03

A Necessary and Sufficient Condition for Two Matrices Synchronously into Hermite Canonical Forms

CUI Jia-feng，ZHANG Li
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

Abstract：By using methods of matrix，two matrices $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ with the same dimensions were transformed synchronously into Hermite canonical forms if and only if $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$. On this basis，for series of matrix with the same dimensions $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\dots,\boldsymbol{A}_t$，all $\boldsymbol{A}_i$ and $\boldsymbol{A}_j\,(i\neq j)$ could be transformed synchronously into Hermite canonical forms if $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_t)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_1+\cdots+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_t$.

Keywords：matrix；Hermite canonical form；invertible matrix

矩阵对角化在矩阵方程、二次型标准化、线性变换以及化学反应动力学[1]等方面有着广泛的应用．一般大多数文献和教材中讨论的都是单个矩阵的相似对角化，即便讨论两个矩阵的同时合同对角化以及相似对角化[2—4]也只是针对方阵而言．文献[5]利用线性空间的观点证明了两个同型矩阵在满足一定条件下可以同时化为Hermite标准型，本文利用纯矩阵的方法给出两个同型矩阵可以同时对角化为Hermite标准型的一个充分必要条件.

定义 1 对于 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，称 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{H}_s=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正 Hermite 标准型，称 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{H}_I=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_r\end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的反 Hermite 标准型，其中 $\boldsymbol{I}_r$ 为 r 阶单位阵．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正 Hermite 标准型和反 Hermite 标准型统称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 标准型.

注：文献[6]关于矩阵的 Hermite 标准型定义相当于文献[7] 矩阵的行最简形（Reduced Row Echelon Form）定义，本文关于 Hermite 标准型与文献[6]的定义是不同的.

引理 1 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩的充要条件是存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{I}_m\ 0)$，其中 0 为 $m\times(n-m)$ 阶零矩阵.

引理 2 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩的充要条件是存在 m 阶可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{QA}=\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$，其中 0 是 $(m-n)\times n$ 阶零矩阵.

收稿日期：2007-09-06；修回日期：2008-02-19
基金项目：天津科技大学科学研究基金资助项目（20060224）
作者简介：崔家峰（1975—），男，天津人，讲师，硕士.

以上两个引理由文[8]不难证明.

引理 3 设 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 s 行构成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $s\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\geqslant \mathrm{rank}\boldsymbol{A}+s-m .$$

证明: 存在 $m\times m$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 使

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}$$

又存在 $m\times m$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 使

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ 0\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}$$

其中 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=\mathrm{rank}\boldsymbol{C}$，于是

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\leqslant \mathrm{rank}\boldsymbol{C}+m-s=\mathrm{rank}\boldsymbol{B}+m-s ,$$

即 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\geqslant \mathrm{rank}\boldsymbol{A}+s-m$.

类似可证得引理 4.

引理 4 设 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 s 列构成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $m\times s$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\geqslant \mathrm{rank}\boldsymbol{A}+s-n .$$

引理 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$.

证明: 因为 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&0\\0&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，而

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&0\\ \boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&0\\0&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n&0\\ \boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&0\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

所以

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&0\\0&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&0\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$$

即

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}\geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) .$$

下面给出本文的中心定理.

定理 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是，存在 m 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ 且 }\boldsymbol{PBQ}=\begin{pmatrix}0&0\\0&\boldsymbol{I}_s\end{pmatrix}$$

其中 $r=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$，$s=\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$，并且 $r+s\leqslant\min(m,n)$.

证明: 先证充分性.

设 $r=\mathrm{rank}\boldsymbol{A},s=\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$ 且 $r+s\leqslant\min(m,n)$，存在 m 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&0\end{pmatrix}_{m\times n}\text{ 且 }\boldsymbol{PBQ}=\begin{pmatrix}0&0\\0&\boldsymbol{I}_s\end{pmatrix}_{m\times n}$$

于是

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&&\\&0&\\&&\boldsymbol{I}_s\end{pmatrix}_{m\times n}$$

因为 $r+s\leqslant\min(m,n)$，所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}=r+s=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$.

再证必要性.

由引理 1 及引理 2，存在 $m\times m$ 的可逆方阵 $\boldsymbol{P}_1$ 及 $n\times n$ 的可逆方阵 $\boldsymbol{Q}_1$，使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{BQ}_1=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{X}$ 为 $r\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Y}$ 为 $m\times s$ 矩阵.

由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$，所以 $r+s\leqslant\min(m\ ,n)$.于是

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11}&\boldsymbol{X}_{12}&\boldsymbol{X}_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{BQ}_1=\begin{pmatrix}0&0&\boldsymbol{Y}_{13}\\0&0&\boldsymbol{Y}_{23}\\0&0&\boldsymbol{Y}_{33}\end{pmatrix}$$

其中，上述矩阵的分块方式保证了 $\boldsymbol{X}_{11}$ 为 $r\times r$ 矩阵，$\boldsymbol{Y}_{33}$ 为 $s\times s$ 矩阵，而且 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{BQ}_1$ 的分块方式相同.

因为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$ 且

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1+\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{BQ}_1=\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11}&\boldsymbol{X}_{12}&\boldsymbol{X}_{13}+\boldsymbol{Y}_{13}\\0&0&\boldsymbol{Y}_{23}\\0&0&\boldsymbol{Y}_{33}\end{pmatrix}$$

由引理 3，$s\geqslant\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{23}\\ \boldsymbol{Y}_{33}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{23}\\ \boldsymbol{Y}_{33}\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{(m-r)\times n}\geqslant$ $r+s+m-r-m=s$.所以，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{23}\\ \boldsymbol{Y}_{33}\end{pmatrix}=s$，即 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{23}\\ \boldsymbol{Y}_{33}\end{pmatrix}$ 为列满秩，再由引理 2，存在 $(m-r)\times(m-r)$ 的可逆方阵 $\boldsymbol{N}$ 使得

$$\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_{23}\\ \boldsymbol{Y}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ I_s\end{pmatrix}$$

同理由引理 4，$\mathrm{rank}(\ \boldsymbol{X}_{11}\ \boldsymbol{X}_{12})=r$，即 $(\boldsymbol{X}_{11}\ \boldsymbol{X}_{12})$ 为行满秩，再由引理 1，存在 $(n-s)\times(n-s)$ 的可逆方阵 $\boldsymbol{M}$ 使得 $(\boldsymbol{X}_{11}\ \ \boldsymbol{X}_{12})\boldsymbol{M}=(I_r\ \ 0)$.

记 $\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}&0\\0&\boldsymbol{I}_s\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&\boldsymbol{N}\end{pmatrix}$，则

$$P_1AQ_1Q_2=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q_2=$$

$$\begin{pmatrix}(X_{11}X_{12}) & X_{13}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & I_s\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}(I_r\ 0) & X_{13}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是

$$P_2P_1AQ_1Q_2=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(I_r\ 0) & X_{13}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0 & X_{13}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}I_r & 0 & X_{13}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同理可得

$$P_2P_1BQ_2Q_2=\begin{pmatrix}0 & Y_{13}\\ 0 & 0\\ 0 & I_s\end{pmatrix}.$$

取 $m\times m$ 可逆方阵 $P_3=\begin{pmatrix}I_r & 0 & -Y_{13}\\ 0 & I_{m-r-s} & 0\\ 0 & 0 & I_s\end{pmatrix}$，$n\times n$ 可逆方阵 $Q_3=\begin{pmatrix}I_r & 0 & -X_{13}\\ 0 & I_{n-r-s} & 0\\ 0 & 0 & I_s\end{pmatrix}$，容易验证

$$P_3P_2P_1AQ_1Q_2Q_3=\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$P_3P_2P_1BQ_1Q_2Q_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_s\end{pmatrix}.$$

记 $P=P_3P_2P_1$，$Q=Q_1Q_2Q_3$，则有

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{且}\ PBQ=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_s\end{pmatrix}$$

并且 $r+s\leqslant\min(m,n)$.

推论　设 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_t$ 均为 $m\times n$ 矩阵，若 $\mathrm{rank}(A_1+\cdots+A_t)=\mathrm{rank}A_1+\cdots+\mathrm{rank}A_t$，则对于任意两个矩阵 $A_i,A_j\ (i\neq j)$，存在 m 阶可逆方阵 P_{ij} 及 n 阶可逆方阵 Q_{ij}，使得

$$P_{ij}A_iQ_{ij}=\begin{pmatrix}I_{ri} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{且}\ P_{ij}A_jQ_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{sj}\end{pmatrix}$$

这里 $ri=\mathrm{rank}A_i$，$rj=\mathrm{rank}A_j$，且 $ri+rj\leqslant\min(m,n)$，$i,j=1,2,\cdots,t$.

证明：由引理 5，$\mathrm{rank}(A_1+A_2+\cdots+A_t)\leqslant\mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}(A_2+\cdots+A_t)\leqslant\mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}A_2+\mathrm{rank}(A_3+\cdots+A_t)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}A_2+\cdots+\mathrm{rank}A_t$ 上面等号成立则要求每个不等号成为等号. 故由最后一个不等式，有 $\mathrm{rank}(A_{t-1}+A_t)=\mathrm{rank}A_{t-1}+\mathrm{rank}A_t$. 由对称性有

$$\mathrm{rank}(A_i+A_j)=\mathrm{rank}A_i+\mathrm{rank}A_j$$
$$i,j=1,\cdots,t$$

由定理可知推论的命题成立.

参　考　文　献：

[1] 詹　浩，钱社棋. 基于遗传算法的化学反应动力学模型简化法[J]. 计算机与应用化学，2007，24（11）：1485—1488.

[2] 张锦川. 实与复方阵的相合标准型和同时对角化[J]. 泉州师范学院学报：自然科学版，2002，20（2）：21—25.

[3] 夏　璇. 二个矩阵同时对角化[J]. 南昌航空工业学院学报：自然科学版，2003，17（3）：26—32.

[4] 陈现平，王文省. 两个矩阵同时对角化的条件[J]. 枣庄学院学报，2005，22（2）：11—13.

[5] 徐利治. 大学数学解题法诠释[M]. 合肥：安徽教育出版社，1999.

[6] 李炯生，查建国. 线性代数[M]. 合肥：中国科技大学出版社，1989：538—547.

[7] Steven J Leon. Linear Algebra with Applications [M]. Seven Edition Pearson Education，Inc.，Prentice Hall，2006：15—18.

[8] 北京大学数学力学系几何与代数教研室. 高等代数[M]. 北京：人民教育出版社，1978：184—185.