



## 蒙特卡洛模拟及其在公差设计中的应用

袁贵星, 王 平

(天津科技大学机械工程学院, 天津 300222)

**摘要:** 在研究了蒙特卡洛 (Monte Carlo) 模拟的概念、方法和基本步骤的基础上, 讨论了蒙特卡洛模拟在计算机辅助统计公差设计中的应用, 提出了基于蒙特卡洛模拟的公差分析流程, 并且运用 Microsoft Excel 软件进行了蒙特卡洛模拟实例计算. 模拟结果表明: 用蒙特卡洛模拟进行公差分析的结果与概率法接近, 随着模拟次数的增加, 计算的精度提高. 蒙特卡洛模拟可求解线性、非线性、平面及空间的尺寸链问题, 是一种普遍适用的统计公差设计方法.

**关键词:** 蒙特卡洛模拟; 统计公差; 公差设计; 公差分析

中图分类号: TG801 文献标识码: A 文章编号: 1672-6510 (2008) 02-0060-05

## Monte Carlo Simulation and Its Application in Tolerance Design

YUAN Gui-xing, WANG Ping

(College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

**Abstract:** The theory, method, and main course of Monte Carlo Simulation were studied. Its application in computer aided statistic tolerance was discussed. A tolerance analysis process based on Monte Carlo Simulation was put forward. And an applied prototype was illustrated with Monte Carlo Simulation in Microsoft Excel. Simulation results indicate that the result of tolerance analysis with Monte Carlo Method is close to the Probability Method and the calculation precision is improved as the simulation is increased. Monte Carlo Method, as a broad applicable tolerance design method, can solve dimensional chains with any form, including linear, nonlinear, plane, and three-dimensional chains.

**Keywords:** Monte Carlo Simulation; statistical tolerance; tolerance design; tolerance analysis

公差分析的方法有极值法和统计公差方法两类. 极值法是建立在零件 100% 互换的基础上, 是一种最简单的方法, 但按极值法计算的公差过于保守, 对加工精度要求提高, 增加制造成本. 根据概率论与数理统计理论进行公差分析的方法称为统计公差方法, 统计公差的方法有概率法、修正的概率法、卷积法、Taguchi 实验法和蒙特卡洛 (Monte Carlo) 模拟法等<sup>[1,2]</sup>. 概率法是建立在假定封闭环为正态分布、置信水平为  $P=99.73\%$  基础上的; 如果改变置信水平, 则难以进行计算, 这与生产的实际要求有时是不相符的. 卷积法主要应用于线形尺寸链的求解, 对非线性尺寸链要进行线形化处理, 会产生舍入误差, 影响计算精度. Taguchi 实验法虽然比较简单, 但它要求组

成环数  $n$  不能太大, 一般应小于 10 的场合. 蒙特卡洛模拟法可以进行各种随机变量 (包括线性、非线性尺寸链) 的模拟计算, 是一种通用的公差分析技术. 由于它的计算精度与样本量的平方根成正比, 故需要的样本量很大, 模拟次数一般在数万次到几十万次才能保证计算精度. 过去认为蒙特卡洛模拟法计算时间长, 限制了它的使用. 随着计算机技术的发展, 计算时间已经不是制约的因素.

因此, 本文对蒙特卡洛模拟在计算机辅助公差设计中的应用进行了探讨, 给出了基于蒙特卡洛模拟的公差分析流程, 并利用 Microsoft Excel 软件的自带函数对阶梯轴的尺寸链公差进行了分析, 以期给研究和应用者以参考.

收稿日期: 2007-12-17; 修回日期: 2008-03-04

基金项目: 天津市应用基础研究重点基金资助项目 (06YFJZJC00500)

作者简介: 袁贵星 (1983—), 男, 湖北麻城人, 硕士研究生.

### 1 蒙特卡洛模拟

蒙特卡洛模拟也称为随机模拟方法,或随机抽样技术.它是一种以概率论和数理统计为基础,通过对随机变量的统计实验、随机模拟来求解问题近似解的数值方法.它的主要思想是:为了求解数学、物理、化学及工程问题,建立一个概率模型或随机过程,使它的参数等于问题的解;然后通过对模型或过程的观察或抽样来计算所求参数的统计特征(如均值、概率等),作为待解问题的数值解,最后给出所求解的近似值,而解的精度可用估计值的方差来表示.

蒙特卡洛模拟的步骤是:首先建立简单而又便于实现的概率分布模型,使分布模型的某些特征(如模型的概率分布或数学期望)恰好是所求问题的解;然后根据概率分布模型的特点和计算的需要改进模型,以便减少方差,降低费用,提高计算效率;再对分布模型进行随机模拟,其中包括建立产生伪随机数的方法和建立对所遇到的分布产生随机变量样本的随机抽样方法;最后建立各种统计量的估计,获得所求解的统计估计值及其方差.

蒙特卡洛模拟方法可分为直接蒙特卡洛模拟、间接蒙特卡洛模拟和蒙特卡洛积分.

(1) 直接蒙特卡洛模拟采用随机数来模拟本身具有复杂随机过程的效应.该方法是按照实际问题所遵循的概率统计规律,用计算机进行直接的抽样,然后计算其统计参数.

直接蒙特卡洛模拟法能充分体现蒙特卡洛方法的特殊性和优越性,因而在物理中得到了广泛的应用,该方法也就是通常所说的“计算机实验”.图1是用直接蒙特卡洛方法模拟分子统计的流程图.其原理是,在微观层次上,直接从分子运动的机理着手,以分子运动论为依据,用有限数目的仿真分子代替大量真实气体分子,跟踪仿真分子的运动轨迹,并在计算机中记录仿真分子的状态参数,如分子位置、速度分量及内能等,最后将这些仿真分子进行统计,从而得到气体宏观的状态参数<sup>[3]</sup>.

(2) 间接蒙特卡洛模拟是人为地构造出一个合适的概率模型,依照该模型进行大量的统计实验,使它的某些统计参数恰好是待求问题的解. Buffon 投针实验就是运用间接蒙特卡洛模拟来求解  $\pi$ <sup>[4]</sup>.

(3) 蒙特卡洛积分是利用随机数系列计算积分的方法,积分维数越高,效率越高.定积分的计算是蒙特卡洛方法被引入计算数学的开端,这里以定积分

的计算说明其处理确定性问题的方法.如计算定积分:

$$s = k \int_0^1 f(x) dx, \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

此时,求定积分亦即求边长为1的正方形中一个曲边梯形的面积问题,如图2所示.可以随机地向正方形内投点,然后统计落在曲线下的点数  $M$ ,当总的投点数  $N$  充分大时,  $kM/N$  就近似等于积分值  $s$ .

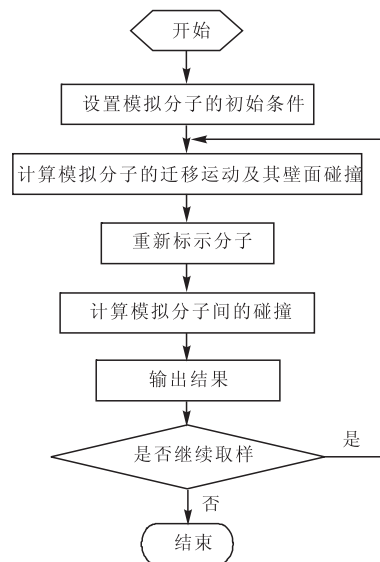


图1 直接蒙特卡洛方法模拟分子统计的流程图  
Fig. 1 Flow chart of molecule statistic by DSMC

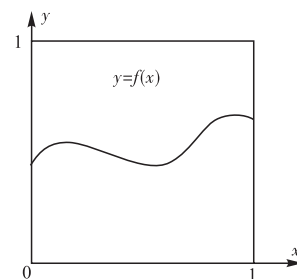


图2 蒙特卡洛方法求定积分  
Fig. 2 Solve definite integral by MC

### 2 蒙特卡洛模拟在计算机辅助统计公差设计中的应用

在产品的设计或加工时,零部件的尺寸公差设计是至关重要的.由于多种因素的影响,零部件实际的尺寸误差具有随机性.在装配过程中,误差会按尺寸链的方向传递,最后全部累积在封闭环尺寸上,公差分析就是对装配过程中的累积误差进行分析.

蒙特卡洛模拟法在公差分析中的使用方法是:模拟已建立标准的装配,获得组成环的公差及分布.基于随机数产生器的使用,模拟组成环或零件制造上误

差变化的影响<sup>[5]</sup>。

蒙特卡洛模拟根据每个尺寸的实际分布,在计算机中采用一定的算法进行抽样,生成相应的随机数,然后根据设计函数计算出封闭环  $y$  的值;当产生足够的  $y$  值后,再求出  $y$  的各阶中心矩。最后,根据封闭环尺寸分布就可以求解相应的公差。

基于蒙特卡洛模拟的公差分析流程如图 3 所示。用蒙特卡洛模拟进行公差分析包括以下内容:

(1) 概率密度函数。公差设计函数的性质与尺寸链各组成环尺寸的概率密度函数有关。设  $n$  为设计变量的个数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相互独立的尺寸设计变量(组成环尺寸),则公差设计函数为

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

(2) 随机数产生器。为了模拟生产中零件的各个组成尺寸,必须模拟产生大量的服从  $(0, 1)$  上均匀分布的随机数。产生伪随机数的方法有平方取中法、线性同余法等。Microsoft Excel、Matlab 等计算机软件都有产生伪随机数的相应函数,使计算机模拟快捷方便。

(3) 抽样规则。零件的各组成环尺寸的概率分布可能不同,因此需要利用各种抽样方法将上面产生的服从  $(0, 1)$  上均匀分布的随机数转换为具有特定分布的随机数。抽样方法有:直接抽样法、变换抽样法、舍选抽样法、复合抽样法和近似抽样法等。下

面是各尺寸分布模型的抽样方法及产生相应随机数的方法。实际生产中,各尺寸设计变量常服从正态分布,但无论是哪一种分布的随机变量,都必须以服从  $U(0, 1)$  分布的随机数为基础。若  $R_U$  为服从  $(0, 1)$  上均匀分布的随机数,可采用变换抽样法得到标准正态分布的随机数:

$$R_N = \sqrt{-2\ln(R_{U1})} \cos(2\pi R_{U2}) \quad (2)$$

其他常用分布的随机数可从表 1 中得到<sup>[6-8]</sup>。

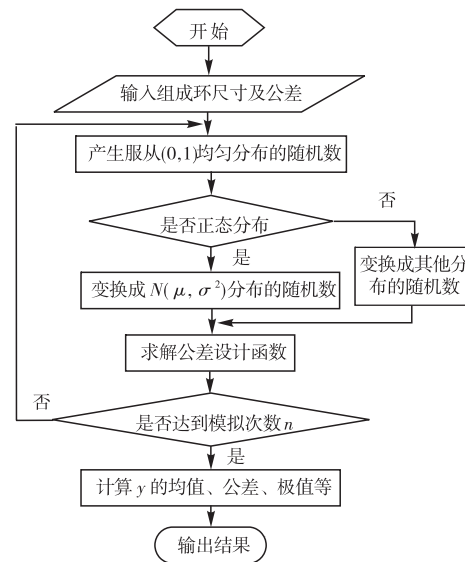


图 3 基于蒙特卡洛模拟的公差分析流程图

Fig. 3 Flow chart of tolerance analysis based on MCS

表 1 常用分布的随机数产生方法

Tab. 1 Approaches to generating random numbers of common distributions

常用分布	抽样方法	参数	随机数 $x$
正态分布	近似抽样法/变换抽样法	$-\infty < \mu < \infty, \sigma$	$x = \mu + \sigma R_N$
Log 正态分布	变换抽样法	$-\infty < \mu < \infty, \sigma$	$x = e^{(\mu + \sigma R_N)}$
均匀分布	直接抽样法	$a < b$	$x = (b - a)R_U + a$
指数分布	直接抽样法	$\lambda > 0$	$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R_U)$
Weibull 分布	直接抽样法	$\beta > 0, \eta > 0$	$x = -\eta [\ln(1 - R_U)]^{1/\beta}$

(4) 模拟计算封闭环尺寸及公差。利用上述方法可获得一组等价于尺寸及公差实际值的随机数,通过尺寸公差设计函数就可以得出相应的  $y$  值,再求出  $y$  的各阶中心矩。 $y$  的一阶、二阶中心矩计算公式分别为

$$m_{1y} = \sum_{i=1}^N y_i / N \quad (3)$$

$$m_{2y} = \sum_{i=1}^N (y_i - m_{1y})^2 / N \quad (4)$$

然后,可得封闭环尺寸设计变量的基本尺寸、极值和公差。

(5) 误差估计。确定所求解的统计误差随模拟次数以及其他一些参量的变化。Lindeberg-Levy 定理指出:无论随机变量如何分布,它的若干个独立随机变量抽样值之和总是近似服从正态分布。设有随机变量  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ , 它们的概率密度函数分别为  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ , 如果将这  $s$  个独立随机变量  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  相加,记  $R_s = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_s$ , 其  $n$  次抽样的独立的观测值为  $R_{s1}, R_{s2}, \dots, R_{sn}$ , 且  $E(R_{si}) = \mu$ ,  $D(R_{si}) = \sigma^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。根据 Lindeberg-Levy 定理,当  $n$  足够大时,  $\sum R_{si}$  近似服从正态分布  $N(n\mu, n\sigma^2)$ 。

设蒙特卡洛估计值  $I_n = \frac{1}{n} \sum R_{si}$ , 而  $I = E(I_n) = \mu$ , 根据正态分布的性质,  $I_n$  也近似服从正态分布  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ . 则对任意的  $\lambda(\lambda > 0)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(-\lambda \leq \frac{I_n - I}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2/2} dt \quad (5)$$

对于给定的显著性水平  $\alpha$ , 令

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_\alpha}^{\lambda_\alpha} e^{-t^2/2} dt = 1 - \alpha \quad (6)$$

$\lambda_\alpha$  可通过查标准正态分布函数数值表求得, 如取显著性水平  $\alpha = 0.0027$ , 查表可得  $\lambda_\alpha = 3$ . 则误差为  $\varepsilon = |I_n - I| \leq 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . 对于显著性水平为  $\alpha$  时, 蒙特卡洛方法的误差估计为

$$\varepsilon = |I_n - I| \leq \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

式(8)说明, 置信度确定后, 蒙特卡洛方法的误差完全由  $\sigma$  和  $n$  决定. 欲减小误差, 可以增大抽样次数, 或者减小方差. 若方差固定, 欲使精度提高 10 倍, 需将模拟次数增加 100 倍, 因此单纯增大模拟次数, 不一定是个好办法. 减小误差的另一途径是减少方差, 可以选取最优的随机变量, 使其方差最小.

### 3 实例

现以某阶梯轴的尺寸链计算为例, 说明蒙特卡洛方法在公差分析中的应用. 图 4 所示的尺寸链的组

成环分别为:  $A_1 = 100_{-0.34}^{-0.12}$ ,  $A_2 = 40 \pm 0.08$ ,  $A_3 = 20_{-0.16}^0$ ,  $A_4 = 180_{-0.72}^0$ , 假设  $A_0, A_4$  服从正态分布,  $A_1, A_2, A_3$  服从均匀分布, 计算封闭环  $A_0$  及其公差(单位: mm).

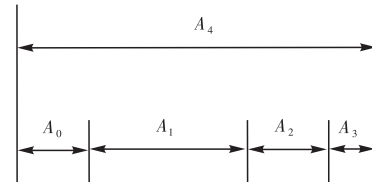


图 4 阶梯轴尺寸链

Fig. 4 Dimensional chain of multidiameter shaft

公差设计函数:  $A_0 = A_4 - (A_1 + A_2 + A_3)$

极值法:  $A_0 = 20_{-0.68}^{+0.58}$ , 均值  $\bar{A}_0 = 19.95$ , 最大值  $A_{0max} = 20.58$ , 最小值  $A_{0min} = 19.32$ , 公差  $T = 1.26$ .

概率法:  $A_0 = 20_{-0.51}^{+0.39}$ , 均值  $\bar{A}_0 = 19.95$ , 最大值  $A_{0max} = 20.39$ , 最小值  $A_{0min} = 19.49$ , 公差  $T = 0.90$ .

蒙特卡洛法: 借助 Microsoft Excel 软件的计算功能, 利用自带函数完成公差分析的蒙特卡洛模拟. 在 Excel 软件中, 产生 (0, 1) 均匀分布随机数的是 RAND 函数, 根据表 1 中的公式, 结合 Excel 的自带函数可产生各种分布的随机数, 即各组成环的模拟数据样本, 把它们代入到公差设计函数中即可得到封闭环的模拟数据样本. 将组成环、封闭环的计算公式复制  $n$  行, 即可完成  $n$  次随机抽样, 亦可得到  $n$  个随机的封闭环尺寸. 最后利用 Excel 软件相关函数可统计这  $n$  个封闭环尺寸, 得到一组所求的均值、标准差、公差、极值等. 当抽样次数  $n$  为 1 000, 10 000 和 60 000 次时, 模拟计算结果如表 2 所示.

表 2 基于蒙特卡洛模拟的公差分析计算结果

Tab. 2 Calculation results of tolerance analysis based on Monte Carlo Simulation

抽样次数	均值 $\mu$	标准差 $\sigma$	公差 $T$	$\mu + 3\sigma$	$\mu - 3\sigma$
1 000	19.958 4	0.151 9	0.911 3	20.414 0	19.502 7
10 000	19.950 8	0.150 8	0.904 6	20.403 0	19.498 5
60 000	19.950 6	0.149 9	0.899 1	20.400 2	19.501 0

从模拟结果可以看出:

(1) 蒙特卡洛模拟计算的封闭环公差远小于用极值法计算的结果, 与概率法计算的结果接近, 降低了零件的加工精度要求, 可放大组成环公差, 节约成本.

(2) 无论组成环尺寸是否服从正态分布, 都可以按照其尺寸规律产生相应随机数, 进行蒙特卡洛模拟计算.

### 4 结 语

讨论了蒙特卡洛模拟在计算机辅助统计公差设计中的应用, 提出了基于蒙特卡洛模拟的公差分析流程, 并且运用 Microsoft Excel 软件进行了蒙特卡洛模拟实例计算. 模拟结果表明: 用蒙特卡洛模拟进行公差分析的结果与概率法接近, 随着模拟次数的增加, 计算的精度提高.

在计算机辅助公差设计中,蒙特卡洛模拟方法可以计算任意置信度、各种概率分布的尺寸链问题,它既适用于线性公差设计函数,也适用于非线性公差设计函数,是一种普遍适用的公差设计方法.关于蒙特卡洛方法在非线形公差设计函数中的应用还有待于进一步研究.

### 参 考 文 献:

- [1] Jeang A, Chen T K, Hwan C L. A statistical dimension and tolerance design for mechanical assembly under thermal impact [J]. *Int J Adv Manuf Technol*, 2002, 20: 907—915.
- [2] 方红芳. 计算机辅助工序尺寸及其公差设计 [M]. 上海:中国纺织大学出版社, 2000.
- [3] 花 嵘, 傅 游, 康继昌. 直接模拟蒙特卡洛问题的并行化方法 [J]. *计算机工程*, 2004, 30 (5): 40—41.

- [4] 尹增谦, 管景峰, 张晓宏, 等. 蒙特卡罗方法及应用 [J]. *物理与工程*, 2002 (3): 45—49.
- [5] 刘大铭, 郑蕉杏. 蒙特卡罗模拟应用在装配不良率导向的公差分析 [J]. *科学与工程技术*, 2006, 2 (4): 67—82.
- [6] 于永利, 朱小冬, 张 柳. 离散事件系统模拟 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2003.
- [7] 庞晓红. 基于 Excel 的蒙特卡洛法及其在工程设计上的应用 [J]. *漳州职业技术学院学报*, 2006, 8 (3): 20—23.
- [8] 王太勇, 熊越东, 路世忠, 等. 蒙特卡洛仿真法在尺寸及公差设计中的应用 [J]. *农业机械学报*, 2005, 36 (5): 102—104.
- [9] Zhong Xin, Yang Ru-qing, Zhou Bing. Accuracy analysis of assembly success rate with Monte Carlo Simulations [J]. *Journal of Donghua University*, 2003, 20 (4): 128—131.

(上接第 33 页)

白反萃取率增加;在相同 pH 和盐离子浓度的条件下, KBr 的反萃效果优于 KCl 的反萃效果,这是由于 Br<sup>-</sup> 的离子半径大于 Cl<sup>-</sup> 的离子半径,因此, Br<sup>-</sup> 对 CTAB 分子的静电屏蔽作用大于 Cl<sup>-</sup> 的静电屏蔽作用,导致 Br<sup>-</sup> 对藻蓝蛋白具有更好的反萃效果.

### 3 结 论

0.04 mol/L 的 CTAB/正戊醇-正辛烷 (体积比 1 : 4) 反胶团体系用于萃取 pH=7, 包含 0.1 mol/L 的 KCl 的螺旋藻细胞破碎液,藻蓝蛋白萃取率可达 96.3%,分配系数达到 26.0,分离因数达到 1.53;采用 pH5.0, 2 mol/L 的 KBr 反萃液反萃藻蓝蛋白,反萃取率可达 90.6%. 结果证实,螺旋藻藻蓝蛋白在该反胶团体系中的萃取率和分配系数均较高.藻蓝蛋白萃取率和反萃取率随水相 pH、离子种类和浓度的变化,可通过反胶团与蛋白质之间的静电相互作用力加以解释.

### 参 考 文 献:

- [1] 赵井泉, 张建平. 用脉冲辐解法研究藻胆蛋白与羟基自由基反应动力学 [J]. *科学通报*, 2000, 45 (1): 32—36.
- [2] Tomohiro H, Misako M, Kaoru H, et al. Activation of the human innate immune system by Spirulina: augmentation of interferon production and NK cytotoxicity by oral administration of hot water extract of Spirulina platensis

- [J]. *International Immunopharmacology*, 2002, 2 (4): 423—434.
- [3] 沈海雁, 王习霞. 螺旋藻藻蓝蛋白对人癌细胞株 HL-60、K-552 和 L-937 生长影响 [J]. *海洋科学*, 2000, 24 (1): 45—48.
- [4] Anamika P, Sandhya M, Richa P, et al. Purification and characterization of c-phycoyanin from cyanobacterial species of marine and freshwater habitat [J]. *Protein Exp Purif*, 2005, 40 (2): 248—255.
- [5] 王 勇, 钱凯先, 董 强. 高纯度藻蓝蛋白分离纯化及光谱特性研究 [J]. *生物化学与生物物理进展*, 1999, 26 (5): 457—460.
- [6] Jarudilokkul S, Poppenborg L H, Stuckey D C. Selective reverse micelles extraction of three proteins from filtered fermentation broth using response surface methodology [J]. *Sep Sci Technol*, 2000, 35 (4): 503—517.
- [7] Dekker M, Van't Riet K, Weijers S R, et al. Enzyme recovery by liquid-liquid extraction using reversed micelles [J]. *Chem Eng J*, 1986, 33 (2): B27—B33.
- [8] 殷 钢, 刘 铮, 刘 飞, 等. 钝顶螺旋藻中藻蓝蛋白的分离纯化及特性研究 [J]. *清华大学学报: 自然科学版*, 1999, 39 (6): 20—22.
- [9] Kaplan D, Calvert H E, Peters G A. The azolla-anabaena azollae relationship. XII. nitrogenase activity and phyco-biliproteins of the endophyte as a function of leaf age and cell type [J]. *Plant Physiol*, 1986, 80 (4): 884—890.
- [10] 赵国玺, 朱 瑶. 表面活性剂作用原理 [M]. 北京:中国轻工业出版社, 2003: 225—329.