第 23 卷 第 1 期
2008 年 3 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.23 No. 1
Mar. 2008

抽象函数的 Riemann 积分

李 君
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘 要：令 φ 是定义在 $[a,b]$ 上，取值于实 Banach 空间 X 的抽象函数，给出了 φ 的弱 Riemann 积分的等价叙述. 同时，讨论了 $l_p(1<p<+\infty)$ 上取值的抽象函数的弱 Riemann 积分与 Riemann 积分的关系. 目前广泛应用的 Pettis 积分是 Riemann 积分的一种推广，举了一个反例说明弱 Pettis 可积的抽象函数不一定 Pettis 可积.

关键词：抽象函数；Riemann 积分；弱 Riemann 积分；Pettis 积分
中图分类号：O177.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6510（2008）01-0080-03

Riemann Integral of Abstract Functions

LI Jun
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

Abstract：Let φ be an abstract function on $[a,b]$ and has values on Real Banach space X，the equivalent description was given on the weak Riemann integral of φ，at the same time，the relations between the weak Riemann integral and the Riemann integral in $l_p(1<p<+\infty)$ was discussed. As a kind of popularized form of the Riemann integral，Pettis integral is extensively applied. We give an example to prove that an abstract function may not be Pettis integral function though it is weak Pettis integral function.

Keywords：abstract function；Riemann integral；weak Riemann integral；Pettis integral

抽象函数的讨论不仅是一种函数论的形式推广，而且有其丰富的理论和实际用途. 有关取值于抽象空间的抽象函数的 Riemann 可积性讨论是一个古典问题，近年来有许多数学工作者在这方面做了一系列卓有成效的工作[1]. 1989 年，王炜人等人考察了一类具有 (XP) 性质的 Banach 空间，得到在该空间中存在 Riemann 可积但处处不连续的抽象函数，同时证明了这类空间不是自反空间[2]；1990 年，张波、曲立学给出了某种抽象函数的 R-S 弱积分的判别条件[3]；1992 年，沈自飞在局部凸空间上给出了抽象函数 Riemann 可积的一个充分条件：闭区间上几乎处处存在右（或左）极限的有界抽象函数是 Riemann 可积的[4]；1995 年，程晓锦、葛仁东给出了 Riemann 积分的一个等价定义，这也为抽象函数的 Riemann 积分的讨论提供了很大的方便[5]；1996 年，曲开社、罗跃虎在 Banach 空间上讨论了牛顿-莱布尼兹公式成立的条件[6]；2006 年，周美秀在 Banach 空间上给出了抽象函数 Riemann 可积的一个新的充分条件，改进推广了文献[4]的结果[7].

本文给出了定义在实直线闭区间 $[a,b]$ 上，取值于实 Banach 空间 X 的抽象函数的弱 Riemann 可积的等价叙述，并阐明了在 l_p $(1<p<+\infty)$ 中弱 Riemann 积分与 Riemann 积分的关系，并就弱 Pettis 可积函数未必 Pettis 可积给出了一个反例.

定义 1 设 $\varphi(t)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上且在实 Banach 空间 X 内取值的抽象函数. 对 $[a,b]$ 的任意分割

$$T:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

作和

收稿日期：2007–06–12；**修回日期**：2007–10–18
基金项目：天津科技大学科学研究基金资助项目（20070205）
作者简介：李 君（1973—），男，黑龙江五常人，讲师.

$$S(\varphi,T)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_{i-1})(t_i-t_{i-1}) \quad (1)$$

若上面的有序定向列 $\{S(\varphi,T)\}$（T 以“细分”来定“序”）强收敛于 X 中的一个元 x_0，则称 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，简称 R 可积.

定义 2 设 $\varphi(t)$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上且在实 Banach 空间 X 内取值的抽象函数，对 $[a,b]$ 的任意分割

$$T:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

作和

$$S(\varphi,T)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})$$

若存在 $x_0\in X$，使当 T 以“细分”来定“序”时，有

$$\lim_{T} f\left[S(\varphi,T)\right]=f(x_0),\ \ \forall f\in X^* \quad (2)$$

则称抽象函数 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上弱 Riemann 可积，简称 wR 可积，并称 x_0 为抽象函数 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上的弱 Riemann 积分，记作

$$x_0=(\mathrm{wR})\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,. \quad (3)$$

显然，$\varphi:[a,b]\to X$ 为弱 Riemann 可积的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$ 及 $f\in X^*$，存在分法 $T(\varepsilon,f)$，当 $T_2\geqslant T(\varepsilon,f)$，$T_1\geqslant T(\varepsilon,f)$ 时，有

$$\left|f\left[S(\varphi,T_2)\right]-f\left[S(\varphi,T_1)\right]\right|<\varepsilon \quad (4)$$

定理 1 如果 X 是弱序列完备的实 Banach 空间，抽象函数 $\varphi:[a,b]\to X$ 为弱 Riemann 可积 $\Leftrightarrow\forall f\in X^*$ 有

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,\mathrm{dia}\,f\left[\varphi[t_{i-1},t_i]\right]\right\}=0 \quad (5)$$

其中 $\mathrm{dia}\,f[\varphi[t_{i-1},t_i]]$ 表示集合 $f[\varphi[t_{i-1},t_i]]$ 的直径.

证明：

（1）必要性.

由弱 Riemann 积分的定义，对 $[a,b]$ 的任意分割

$$T:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

当作和

$$S(\varphi,T)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})$$

时，如果存在 $x_0\in X$，当 T 以“细分”来定“序”时，使得 $\forall f\in X^*$，有

$$f\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\varphi(t_{i-1})-x_0\right]\to 0$$

从而 $\forall\varepsilon>0$，存在分法 $T(\varepsilon)$，当 $T\geqslant T(\varepsilon)$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,f\left[\varphi(t_{i-1})\right]-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

当然对 $\forall t'_{i-1}\in[t_{i-1},t_i]$，也有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,f\left[\varphi(t'_{i-1})\right]-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left\{f[\varphi(t_{i-1})]-f[\varphi(t'_{i-1})]\right\}\right|<2\varepsilon$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,\mathrm{dia}\,f\left[\varphi[t_{i-1},t_i]\right]<2\varepsilon$$

即

$$\inf_T\left\{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,\mathrm{dia}\,f\left[\varphi[t_{i-1},t_i]\right]\right\}=0\,.$$

（2）充分性.

已知

$$\inf_T\left\{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,\mathrm{dia}\,f\left[\varphi[t_{i-1},t_i]\right]\right\}=0$$

则 $\forall\varepsilon>0,\ f\in X^*$，存在分法 T_0，使

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,\mathrm{dia}\,f\left[\varphi[t_{i-1},t_i]\right]<\varepsilon$$

对 $T>T_0$，$\forall i$（$1\le i\le n$），不失一般性，设

$$t_{i-1}=t_{i_0}<t_{i_1}<t_{i_2}<\cdots<t_{i_{k-1}}<t_{i_k}=t_i$$

则

$$S(\varphi,T)-S(\varphi,T_0)=\sum_{j=1}^{m}(t_j-t_{j-1})\varphi(t_{j-1})-\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\varphi(t_{i-1})$$

在 $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 上的差为

$$\begin{aligned}&(t_{i_1}-t_{i-1})\varphi(t_{i-1})+(t_{i_2}-t_{i_1})\varphi(t_{i_1})+\cdots+\\&(t_i-t_{i_{k-1}})\varphi(t_{i_{k-1}})-(t_i-t_{i-1})\varphi(t_{i-1})=\\&(t_{i_1}-t_{i-1})\varphi(t_{i-1})+(t_{i_2}-t_{i_1})\varphi(t_{i_1})+\cdots+\\&(t_i-t_{i_{k-1}})\varphi(t_{i_{k-1}})-(t_i-t_{i_{k-1}}+t_{i_{k-1}}-t_{i_{k-2}}+\cdots+\\&t_{i_2}-t_{i_1}+t_{i_1}-t_{i-1})\varphi(t_{i-1})=\\&(t_{i_1}-t_{i-1})\left[\varphi(t_{i-1})-\varphi(t_{i-1})\right]+(t_{i_2}-t_{i_1})\left[\varphi(t_{i_1})-\right.\\&\left.\varphi(t_{i-1})\right]+\cdots+(t_i-t_{i_{k-1}})\left[\varphi(t_{i_{k-1}})-\varphi(t_{i-1})\right]=\\&\sum_{l=1}^{i_k}(t_{i_l}-t_{i_{l-1}})\left[\varphi(t_{i_{l-1}})-\varphi(t_{i-1})\right]\end{aligned}$$

于是

$$S(\varphi,T)-S(\varphi,T_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i_k}(t_{i_l}-t_{i_{l-1}})\left[\varphi(t_{i_{l-1}})-\varphi(t_{i-1})\right] \quad (6)$$

故 $\forall f\in X^*$，有

$$\begin{aligned}&\left|f\left[S(\varphi,T)-S(\varphi,T_0)\right]\right|\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{l=1}^{i_k}(t_{i_l}-t_{i_{l-1}})f[\varphi(t_{i_{l-1}})-\varphi(t_{i-1})]\right|\leqslant\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\operatorname{dia} f[\varphi[t_{i-1}, t_i]] < \varepsilon$$

从而对任意 $T_1 \geqslant T_0$，$T_2 \geqslant T_0$，有

$$\left| f\left[S(\varphi,T_1) - S(\varphi,T_2)\right]\right| < 2\varepsilon$$

这说明了 $\{S(\varphi,T)\}$ 是 X 中的弱 Cauchy 列，而 X 又是弱序列完备空间，于是存在 $x_0 \in X$，使

$$\lim_{T} f[S(\varphi,T)] = f(x_0),\quad \forall f \in X^* \tag{7}$$

至此证明了 φ 在 X 中弱 Riemann 可积.

定理 2 设抽象函数 φ: $[a,b] \to l_p$（$1< p< +\infty$），则 φ 在 $[a,b]$ 上弱 Riemann 可积 $\Leftrightarrow$ φ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证明： 显然定理的充分性成立. 下面仅证必要性.

由定理 1 的证明，结合弱 Riemann 积分的定义，若抽象函数 φ 在 $[a,b]$ 上是弱 Riemann 可积的，则存在 $x_0 \in X$，使对任意分法 T，在分法无限加细的极限状态下，$\forall f \in l_q$ $(q > 0: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$，有

$$f\left[\sum_{T}(t_i - t_{i-1})\varphi(t_{i-1}) - x_0\right] \to 0$$

由于 l_p $(1 < p < +\infty)$ 是光滑的，记

$$y_T = \sum_{T}(t_i - t_{i-1})\varphi(t_{i-1}) - x_0$$

则存在 $f_T \in l_q$，使

$$f_T(y_T) = f_T\left[\sum_{T}(t_i - t_{i-1})\varphi(t_{i-1}) - x_0\right] = \left\|\sum_{T}(t_i - t_{i-1})\varphi(t_{i-1}) - x_0\right\|$$

从而在分法无限加细的极限状态下

$$\sum_{T}(t_i - t_{i-1})\varphi(t_{i-1}) - x_0 \to 0$$

这也证明了 φ 是 Riemann 可积的.

推论： 如果 X 是弱序列完备的有限维 Banach 空间，抽象函数 φ: $[a,b] \to X$，则 φ 在 $[a,b]$ 上弱 Riemann 可积 $\Leftrightarrow$ φ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

类似实变函数理论中由（R）积分推广到（L）积分的不同途径，也可以把抽象函数的 Riemann 积分以各种形式推广，如目前广泛应用的 Pettis 积分. 众所周知，自反空间中，Pettis 积分与弱 Pettis 积分等价；而在非自反空间中，（L）$\int_{\Omega} f(\varphi(t))\mu \mathrm{d}t$ 存在一般并不能保证 $\varphi(t)$ 的 Pettis 积分 φ_0 的存在.

例： $\varphi(t) = \{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$，$t \in [0,1]$，$\varphi(t) \in (c)$，按如下方式定义：

$$\varphi_{2n-1}(t) = 0$$

$$\varphi_{2n}(t) = \begin{cases} 2n-1 & 0 < t \leqslant \dfrac{1}{2n+1},\ n=1,2,\cdots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由函数 $\varphi(t)$ 的结构可以知道：

$\frac{1}{3} < t \leqslant 1$ 时，$\varphi(t) = (0,\ 0,\ 0\cdots0\cdots)$

$\frac{1}{5} < t \leqslant \frac{1}{3}$ 时，$\varphi(t) = (0,\ 1,\ 0,\cdots0\cdots)$

$\frac{1}{7} < t \leqslant \frac{1}{5}$ 时，$\varphi(t) = (0,\ 1,\ 0,3,\ 0\cdots0\cdots)$

…　…

$\frac{1}{2n+3} < t \leqslant \frac{1}{2n+1}$ 时，

$$\varphi(t) = (0,1,0,3,0\cdots0,\ 2n-1,0,\cdots)$$

对任意的 $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in (c)^* = l^1$，有

$$\int_0^1 f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \left(\int_{\frac{1}{3}}^{1} + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} + \int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{5}} + \cdots + \int_{\frac{1}{2n+3}}^{\frac{1}{2n+1}} + \cdots\right) f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{3}f_2 + \frac{3}{5}f_4 + \frac{5}{7}f_6 + \cdots + \frac{2n-1}{2n+1}f_{2n} + \cdots$$

结合 $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$ 知道（L）积分存在.

另一方面，$(c^*)^* = (m)$ 中的元素 $\varphi_0 = (0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{3}{5},\ 0,\ \frac{5}{7},\ \cdots\frac{2n-1}{2n+1},\ 0,\ \cdots) \notin (c)$，这就证明了 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Pettis 可积的.

参 考 文 献：

［1］ 定光桂. Banach 空间引论［M］. 北京：科学技术出版社，1999.

［2］ 王炜人，王振国，郭志堂，等. 一类 Banach 空间与 Riemann 可积性的关系［J］. 大庆石油学院学报，1989，13（4）：78—83.

［3］ 张　波，曲立学. 关于抽象函数的 R-S 弱积分［J］. 数学进展，1990，19（2）：209—219.

［4］ 沈自飞. 抽象函数黎曼可积的一个充分条件［J］. 浙江师范大学学报：自然科学版，1992，15（3）：24—26.

［5］ 程晓锦，葛仁东. Riemann 积分的一个等价定义［J］. 辽宁工学院学报，1995，15（2）：86—88.

［6］ 曲开社，罗跃虎. Banach 空间上牛顿-莱布尼兹公式成立的特征［J］. 高校应用数学学报：A 辑，1996，3：329—334.

［7］ 周美秀. 抽象函数的黎曼可积性［J］. 浙江师范大学学报：自然科学版，2006，26（3）：266—268.