



## 多分子饱和反应动力系统的定性分析

丁玉梅<sup>1</sup>, 张琪昌<sup>2</sup>, 张瑞海<sup>1</sup>

(1. 天津科技大学理学院, 天津 300457; 2. 天津大学机械学院, 天津 300072)

**摘要:** 对一类具有二重饱和反应速度的生化反应动力系统进行研究, 讨论了系统平衡点的稳定性态, 对系统的极限环及 Hopf 分支现象进行分析. 应用微分方程定性理论, 研究该系统极限环存在唯一性的充分条件. 引入适当的变换, 将系统简化为规范形, 同时利用动力系统规范形理论, 研究该系统的 Hopf 分支. 指出系统的平衡点为一阶稳定细焦点, 当正平衡点不稳定时, 一定存在唯一稳定极限环. 最后, 将系统与具有米氏饱和反应速度的生化反应动力系统的定性性质进行了比较.

**关键词:** 饱和反应; 极限环; Hopf 分支

中图分类号: O175.12 文献标志码: A 文章编号: 1672-6510(2009)06-0074-05

## Qualitative Analysis of a Class of Multimolecules Saturated Reaction Dynamical System

DING Yu-mei<sup>1</sup>, ZHANG Qi-chang<sup>2</sup>, ZHANG Rui-hai<sup>1</sup>

(1. College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China;

2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** A class of multimolecules saturated reaction model was studied and the stability of equilibrium was discussed. The limit cycle and the Hopf bifurcation behavior of the system were studied. The conditions of existence and uniqueness of limit cycles were obtained by using the qualitative theory of ordinary differential equations. The Hopf bifurcation behavior of the dynamic system was exploited by using the method of normal form theory and other approaches. It shows that the first order weak focus is stable. When the positive singular point is unstable, the system has unique stable limit cycle in the neighborhood of this critical point. At last we compared qualitative property of different systems with saturated reaction speed.

**Keywords:** saturated reaction; limit cycle; Hopf bifurcation

文献[1]研究了具有米氏饱和反应速度的生化模

型

$$\begin{cases} \dot{x} = (a-b)x - xy^n \\ \dot{y} = bx + xy^n - \frac{cy}{y+k} \end{cases} \quad (n \geq 2) \quad (1)$$

给出该系统中极限环的存在性、不存在性和唯一性的条件. 由文献[2]知, 在生化反应中, 除了米氏饱和反应速度外, 还有多重饱和反应速度, 本文探讨具有二重饱和反应速度的生化反应模型

$$\begin{cases} \dot{x} = (a-b)x - xy^n \\ \dot{y} = bx + xy^n - \frac{cy^2}{y^2+k} \end{cases} \quad (n \geq 3) \quad (2)$$

其中,  $a, b, c, k$  由于实际问题的需要, 均为正常数. 对系统(2)进行定性分析, 给出极限环存在唯一性的充分条件. 对系统进行变换与化简, 借助于规范形理论, 研究了系统的 Hopf 分支, 得出相关定理. 与文献[1]中的一重饱和反应速度生化模型的定性性质进行比较, 研究该模型中, 米氏饱和反应速度对模型形态

收稿日期: 2008-12-15; 修回日期: 2009-02-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872141); 天津科技大学科学研究基金资助项目(20070210)

作者简介: 丁玉梅(1972—), 女, 山东栖霞市人, 副教授, dingym@tust.edu.cn.

的影响.

由于系统(2)的实际生化意义,本文限制在区域  $G = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  内讨论问题.

### 1 平衡点类型

对系统(2)作变换  $dt = (y^2 + k)dt_1$ , 仍记  $dt_1 = dt$ , 则系统(2)拓扑等价于

$$\begin{cases} \dot{x} = (ax - bx - xy^n)(y^2 + k) \\ \dot{y} = (bx + xy^n)(y^2 + k) - cy^2 \end{cases} \quad (3)$$

经计算,系统(3)在区域  $G$  内,当  $a > b$  时,存在唯一的正奇点  $M(A, B)$ , 其中  $A = \frac{cB^2}{a(B^2 + k)}$ ,  $B = \sqrt[3]{a - b}$ . 于是奇点  $M$  处的 Jacobian 矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{A}{B}[nB^{n+2} + k(n-2)B^n - 2bk]\lambda + naAB^{n-1}(B^2 + k)^2 = 0$$

令  $T = nB^{n+2} + k(n-2)B^n - 2bk$ , 则可得出如下的结论.

**定理 1** 当  $T < 0$  时,  $M$  为稳定的焦点或结点; 当  $T > 0$  时,  $M$  为不稳定的焦点或结点; 当  $T = 0$  时,  $M$  为退化的细焦点.

### 2 极限环的存在唯一性

由于当  $a \leq b$  时,系统(3)无正奇点,故在第一象限无极限环,故本文总假定  $a > b$ .

**定理 2** 当  $T > 0$  时,系统(3)在区域  $G$  内奇点  $M$  的外围至少存在一个极限环.

**证明** 用广义 Poincare-Bendixson 环域定理<sup>[4]</sup>来证明. 作如下图 1:

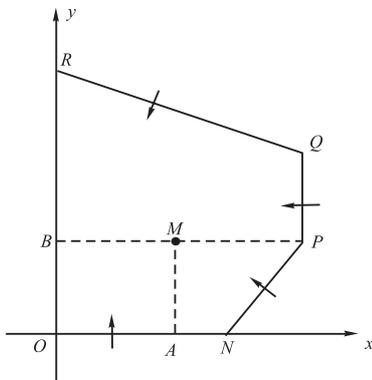


图 1 系统(3)的外境界线

Fig.1 Outer boundary curve of system (3)

显然  $x=0$  为系统(3)的积分直线,  $y=0$  为无切

线. 在  $x$  轴上任取一点  $N(x_0, 0)$ , 其中  $x_0 > A$ , 过点  $N$  作直线  $NP: x - x_0 - \frac{2a}{b}y = 0$ , 记  $P$  点的坐标为  $(x_0 + \frac{2aB}{b}, B)$ ; 过点  $P$  作  $x$  轴的垂直线  $PQ$ , 记  $Q$  点的坐标为  $(x_0 + \frac{2aB}{b}, y_1)$ ; 过点  $Q$  作直线与  $y$  轴相交于点  $R(0, m)$ , 其中  $m = x_0 + \frac{2aB}{b} + y_1$ . 下面讨论各线段上轨线的走向:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{ON} = bkx > 0 \quad (x > 0);$$

$$\left. \frac{dl}{dt} \right|_{NP} = -(y^2 + k)(x_0 + \frac{2a}{b}y).$$

$$(a + b + y^n + \frac{2a}{b}y^n) + \frac{2ac}{b}y^2 < 0$$

(当  $0 \leq y \leq B, x_0$  充分大时);

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{PQ} = (y^2 + k)(x_0 + \frac{2aB}{b})(B^n - y^n) < 0 \quad (y > B);$$

$$\left. \frac{dl}{dt} \right|_{QR} = -ay^3 + (ma - c)y^2 - ak y + amk < 0$$

(当  $y_1$  充分大时);

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{RO} = (ax - bx - xy^n)(y^2 + k) = 0$$

综上所述,闭曲线  $\overline{ONPQRO}$  构成广义 Bendixson 环域的外境界线,其上向量场的方向均由外向内,又由  $M$  点在定理条件下为不稳定的焦点或结点,所以由环域定理知系统(3)在区域  $G$  内  $M$  点的外围至少存在一个极限环.

引理 1<sup>[6]</sup> 如果系统  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi(y) - \int_x^r f(s)ds \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) \end{cases}$

满足:

(1)  $\frac{d\varphi(y)}{dy} > 0$ ;

(2) 存在唯一的  $x^* \in (r_1, r_2)$ , 使得  $g(x^*) = 0$ , 且当  $x \neq x^*$  时, 有  $(x - x^*)g(x - x^*) > 0$ ;

(3) 当  $x \neq x^*$  时, 有  $f(x^*) \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' < 0$ ;

则该系统至多存在一个极限环,如若存在,则必是稳定的.

为利用引理 1 讨论系统(3)中极限环的唯一性,先将系统(3)化为 Lienard 方程. 令  $x_1 = x - A, y_1 = y - B, (x_1 + A)(y_1 + B)^2 dt = d\tau$ . 记  $x_1 = x, y_1 = y, d\tau = dt$ , 则系统(3)拓扑等价于

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{[(y+B)^2+k][a-b-(y+B)^n]}{(y+B)^2} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{[(y+B)^2+k][b+(y+B)^n]}{(y+B)^2} - \frac{c}{x+A} \end{cases} \quad (4)$$

令  $u = y, v = x$ , 仍记  $u = x, v = y$  则系统(4)可化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{c}{A} + \frac{[(x+B)^2+k][b+(x+B)^n]}{(x+B)^2} + \frac{cy}{A(y+A)} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{[(x+B)^2+k][(x+B)^n-B^n]}{(x+B)^2} \end{cases} \quad (5)$$

记

$$\varphi(y) = \frac{cy}{A(y+A)}$$

$$F(x) =$$

$$\int_x^s f(s)ds = \frac{c}{A} - \frac{[(x+B)^2+k][b+(x+B)^n]}{(x+B)^2}$$

$$g(x) = \frac{[(x+B)^2+k][(x+B)^n-B^n]}{(x+B)^2}$$

下面验证系统(5)满足引理1的三个条件:

$$(1) \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{c}{(y+k)^2} > 0;$$

(2) 当且仅当  $x^* = 0$ , 使  $g(x^*) = 0$ , 且当  $x > 0$  时, 有  $xg(x) > 0$ ;

(3) 经计算知

$$f(x) = -\frac{n(x+B)^{n+2} + k(n-2)(x+B)^n - 2kb}{(x+B)^3}$$

$$\text{故 } f(0) = -\frac{nB^{n+2} + k(n-2)B^n - 2kb}{B^3} = -\frac{T}{B^3}$$

显然, 当  $T > 0$  时, 有  $f(0) < 0$ .

$$\text{因为 } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ 要证}$$

$$f(x^*) \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' < 0, \text{ 只要证明 } f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0,$$

记  $s = x + B$ , 计算

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) - f(x)g'(x) &= s^{-6} [ns^{2n+4} + \\ & 2k(n-3)s^{2n+2} + n(n-1)B^n s^{n+4} + \\ & k^2(n-2)s^{2n} + 6kbB^n s^2 + \\ & 2k^2B^n b + D_1 s^{n+2} + D_2 s^n] \end{aligned}$$

其中,  $D_1 = 2k[(n^2 - 2n + 3)a - (n^2 - n + 6)b]$

$$D_2 = k^2[n^2 - 3n + 2)a - (n^2 - n + 4)b]$$

计算知, 当  $n = 3, a \geq 2b$  时, 有  $D_1 \geq 0$ ; 当  $n = 3, a \geq 5b$  时, 有  $D_2 \geq 0$ , 同理可以证明当  $n \geq 3, a \geq 5b$  时, 有

$D_1 \geq 0$  且  $D_2 \geq 0$ . 故当  $n \geq 3, a \geq 5b$  时, 有  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0$ , 条件(3)满足. 由此可得到下面的定理.

**定理 3** 当  $T > 0, a \geq 5b$  时, 系统(3)至多存在一个极限环, 若存在, 则必是稳定极限环.

由定理2和定理3可得到:

**定理 4** 当  $T > 0, a \geq 5b$  时, 系统(3)在区域  $G$  内存在唯一稳定的极限环.

### 3 系统的 Hopf 分支

为了研究系统的 Hopf 分支, 将原系统进行另外形式的化简<sup>[3]</sup>.

$$\text{令 } \begin{cases} x = Bx' \\ y = By' \end{cases}, \text{ 并记 } B^n dt = d\tau, \text{ 仍记 } d\tau = dt, \text{ 则系统}$$

(2)可化为

$$\begin{cases} \dot{x}' = \frac{a}{B^n} x' - \frac{b}{B^n} x' - x' y^m \\ \dot{y}' = \frac{b}{B^n} x' + x' y^m - \frac{\frac{c}{B^{n+1}} y'^2}{y'^2 + \frac{k}{B^2}} \end{cases} \quad (n \geq 3)$$

记  $\frac{a}{B^n} = a', \frac{b}{B^n} = b', \frac{c}{B^{n+1}} = c', \frac{k}{B^2} = k'$ , 则系统(2)拓扑等价于

$$\begin{cases} \dot{x}' = a' x' - b' x' - x' y^m \\ \dot{y}' = b' x' + x' y^m - \frac{c' y'^2}{y'^2 + k'} \end{cases} \quad (n \geq 3) \quad (6)$$

经计算, 此系统的正平衡点为  $M'(\frac{c'}{a'(1+k')}, 1)$ , 注意到满足平衡点的条件方程  $a'x' - b'x' - x'y^m = 0$ , 故  $a' - b' = 1$ , 因此系统(6)的等价方程为

$$\begin{cases} \dot{x}' = x' - x' y^m \\ \dot{y}' = b' x' + x' y^m - \frac{c' y'^2}{y'^2 + k'} \end{cases} \quad (n \geq 3) \quad (7)$$

该系统的平衡点可化简为  $M'(\frac{c'}{(1+b')(1+k')}, 1)$ .

计算平衡点的散度为

$$\text{div} M'(\frac{c'}{(1+k')(1+b')}, 1) = \frac{c'}{(1+k')^2(1+b')} \cdot [n + (n-2)k' - 2k'b']$$

由此得出如定理1一致的结论. 下面, 讨论当  $T = 0$  时, 系统在细焦点的稳定性.

对系统(7)作变换  $dt = (y'^2 + k')dt_1$ , 仍记  $dt_1 = dt$ ,

则系统(7)拓扑等价于

$$\begin{cases} \dot{x}' = (x' - x' y^m)(y'^2 + k') \\ \dot{y}' = (b' x' + x' y^m)(y'^2 + k') - c' y'^2 \end{cases} \quad (8)$$

作线性变换  $\begin{cases} x' = x + \frac{c'}{(1+k')(1+b')} \\ y' = y + 1 \end{cases}$ , 则系统(8)等价于

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{c'n}{1+b'}y - n(1+k')xy + [-\frac{2c'n}{(1+k')(1+b')} - \frac{n(n-1)c'}{2(1+b')}]y^2 + [-2n - \frac{n(n-1)(1+k')}{2}]xy^2 + [-\frac{n^2c'}{(1+k')(1+b')} - \frac{n(n-1)(n-2)c'}{6(1+b')}]y^3 \\ \dot{y} = (1+k')(1+b')x + (\frac{-2c'k'}{1+k'} + \frac{nc'}{1+b'})y + [2(1+b') + n(1+k')]xy + [\frac{-c'k'}{1+k'} + \frac{2nc'}{(1+k')(1+b')} + \frac{n(n-1)c'}{2(1+b')}]y^2 + [1+b' + 2n + \frac{n(n-1)(1+k')}{2}]xy^2 + [\frac{n^2c'}{(1+k')(1+b')} + \frac{n(n-1)(n-2)c'}{6}]y^3 \end{cases} \quad (9)$$

由定理 1 知,当  $T=0$ ,即  $b' = \frac{n+(n-2)k'}{2k'}$  时,系统具有细焦点,将此条件代入上式,则系统(9)可化简为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{2c'k'}{1+k'}y - n(1+k')xy + \frac{(-n-3)c'k' + (1-n)c'k'^2}{(1+k')^2}y^2 + \frac{-n(n-1)k' - n(n+3)}{2}xy^2 + [\frac{-2nc'k'}{(1+k')^2} - \frac{(n-1)(n-2)c'k'}{3}]y^3 \\ \dot{y} = \frac{n(1+k')^2}{2k'}x + \frac{n(1+k')^2}{k'}xy + \frac{c'k'(n+nk'+2-2k')}{(1+k')^2}y^2 + \frac{n+(n^2+4n)k'+(n^2-n)k'^2}{2k'}xy^2 + [\frac{2nc'k'}{(1+k')^2} + \frac{(n-1)(n-2)c'k'}{3(1+k')}]y^3 \end{cases} \quad (10)$$

令  $\begin{cases} \xi = \frac{n(1+k')^2}{2k'}x \\ \eta = \sqrt{c'n(1+k')}y \end{cases}$ ,  $dt_1 = \sqrt{c'n(1+k')}dt$ , 仍记

$\xi = x, \eta = y, dt_1 = dt$ , 记  $\Delta = c'n(1+k')$ , 则系统(10)拓扑等价于

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \frac{1}{c'}xy + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{-n-3+(1-n)k'}{2(1+k')}y^2 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{-n-3+(1-n)k'}{2(1+k')c'}xy^2 - \frac{(n-1)(n-2)k'+(n+1)(n+2)}{6nc'(1+k')^2}y^3 \\ \dot{y} = x + \frac{2}{\sqrt{\Delta}}xy + \frac{1}{\Delta} \frac{c'k'(n+nk'+2-2k')}{(1+k')^2}y^2 + \frac{1}{\Delta} \frac{n+(n^2+4n)k'+(n^2-n)k'^2}{2k'}xy^2 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{\Delta} [\frac{2nc'k'}{(1+k')^2} + \frac{(n-1)(n-2)c'k'}{3(1+k')}]y^3 \end{cases} \quad (11)$$

根据规范形理论,计算系统(11)的一阶细焦点量为<sup>[7]</sup>

$$p = -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{k'}{n(1+k')^4} [2(n-2)k'^2 + 6(n-2)k' + 4(n+2)] < 0$$

故得到如下结论:

**定理 5** 当  $n+(n-2)k'-2k'b'=0$ ,即  $T=0$  时,系统(3)的平衡点为一阶稳定细焦点.

**定理 6** 系统(2)在平衡点的小邻域内,当正平衡点  $M$  稳定时,不存在极限环;当正平衡点  $M$  不稳定时,一定存在唯一稳定极限环.

### 4 比较

系统(1)和(2)是对应米氏饱和反应速度和二重饱和反应速度的两个生化模型,它们除反应速度外结构相同.定性分析知,系统都只有一个平衡点,且平衡点的类型相同,相应范围内存在唯一的极限环,在一定的条件下,产生 Hopf 分支现象.但是由于反应速度的影响,对应极限环的存在唯一性区域不同.特别是由于多重饱和反应速度的影响,使模型所适用的范围有所限制,比如原来系统适用的范围  $n \geq 2$ ,现在变成  $n \geq 3$  等.事实上,可以推断出对于二重以上的饱和反应速度的生化模型,上述定性的结论是仍然成立的.

以上结论,对进一步讨论多重饱和反应速度的生化模型的性质,提供了理论基础.

### 参考文献:

- [1] 徐瑞,董士杰.一类多分子生化反应系统的定性分析[J].工程数学学报,2000,17(1):109-112.
- [2] 陈兰荪,陈键.非线性生物动力系统[M].北京:科学出版社,1993:32-51.

- [3] 刘美娟,沈伯骞. 捕食者种群具有密度制约的一类厌食系统[J]. 纯粹数学与应用数学,1999,15(2):7-12.
- [4] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社,1985.
- [5] 窦霁虹,黄为. 一类非线性生化系统的定性分析[J]. 高校应用数学学报:A辑,2003,18(2):158-162.
- [6] Coppel W A. Some quadratic systems with at most one limit cycle [J]. Dynamics Reported,1989,2:61-88.
- [7] 张琪昌,胡兰霞,何学军. 高维 Hopf 分岔系统的最简规范形[J]. 天津大学学报,2005,38(10):878-881.
- [8] Tian Ruilan,Zhang Qichang,He Xuejun. Calculation of coefficients of simplest normal forms of Hopf and generalized Hopf bifurcations[J]. Transactions of Tianjin University,2007,13(1):18-22.
- [9] 黄建华,张新建. 一类生化反应系统极限环的存在唯一性[J]. 生物数学学报,2000,15(4):432-436.

(上接第 67 页)

洗能力.

(3) 谐振腔长径比与反馈压力波的产生密切相关,谐振腔过长或过短都不利于驻波的形成,只有当扰动频率与固有频率接近时可获得有效激励脉动,因此存在一个最佳谐振腔长度.

#### 参考文献:

- [1] 付胜,李海涛,刘丽丽,等. 空化水射流的形成方法及其应用研究[J]. 机械科学与技术,2006,25(4):491-496.
- [2] 宫伟力. 自振射流理论与水射流超细粉碎技术的研究[D]. 北京:北京科技大学,1999.
- [3] Jyoti K K,Pandit A B. Water disinfection by acoustic and hydrodynamic cavitation[J]. Biochemical Engineering Journal,2001(3):201-202.
- [4] 王萍辉. 空化水射流清洗实验的研究[J]. 中国矿业,2004,13(5):43-46.
- [5] 沈忠厚. 水射流理论与技术[M]. 东营:石油大学出版社,1998.
- [6] 易灿,李根生,张定国. 自振喷嘴空化起始能力研究[J]. 中国机械工程,2005,16(21):1945-1948.
- [7] 窦照英. 实用化学清洗技术[M]. 北京:化学工业出版社,2001.
- [8] 徐晓东. 水力喷射超细粉碎流场颗粒力学行为的研究[D]. 北京:北京科技大学,2000.
- [9] 王循明. 自激振荡脉冲射流装置性能影响因素数值分析及喷嘴结构优化设计[D]. 浙江:浙江大学,2005.

(上接第 73 页)

#### 参考文献:

- [1] 张兴华. 模糊聚类分析的新算法[J]. 数学的实践与认识,2005,35(3):138-141.
- [2] 吴善杰. 关于模糊聚类分析方法的进一步思考[J]. 华北科技学院学报,2008,5(1):108-111.
- [3] 汤服成. 一种聚类分析方法[J]. 数学的实践与认识,1988,24(2):50-60.
- [4] Fu Guoyao. An algorithm for computing the transitive closure of a fuzzy similarity matrix[J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,51(2):189-194.
- [5] 王静龙. 多元统计分析[M]. 北京:科学出版社,2008.