



摩擦接触问题参变量二次规划分析的增广 Lagrange 算法

李建宇, 毕德学

(天津科技大学机械工程学院, 天津 300222)

摘要: 建立了摩擦接触条件的增广 Lagrange 线性互补表述形式, 继而构造出求解摩擦接触问题的一种增广 Lagrange 线性互补算法. 与求解摩擦接触问题参变量二次规划法相比, 本文模型在理论上是对摩擦接触条件的一种精确正则化模型, 虽然其中也包含了惩罚参数, 但在理论上不需要它趋于无穷大就能得到精确解; 所提算法编程简单, 便于装入现有有限元分析模块中. 应用实例表明了本文方法的正确性和有效性.

关键词: 摩擦接触问题; 参变量变分原理; 增广 Lagrange 法; 互补模型

中图分类号: O313.5; O343.3 文献标志码: A 文章编号: 1672-6510(2009)06-0054-06

A Parametric Augmented Lagrangian Quadratic Programming Approach for Frictional Contact Problems

LI Jian-yu, BI De-xue

(College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

Abstract: An augmented Lagrangian-linear complementarity frictional contact condition was presented, which was an exact regularized frictional contact formulation. Based on this, a parametric augmented Lagrangian quadratic programming algorithm was established for the frictional contact problems. Compared with the well known parametric quadratic programming approach for frictional contact problems, although the proposed formulation also contains a penalty term, the penalty factor was unnecessary ordered to trend to infinity. Planar elastic frictional contact problem was formulated as an illustrative application and some numerical results were given to demonstrate the correctness and effectiveness of the proposed method.

Keywords: frictional contact problems; parametric quadratic programming; augmented Lagrangian method; linear complementarity problem

机械、航空航天、土木工程等领域存在着大量的接触现象, 随着人们对于现代工程结构分析精细程度的不断提高, 对接触问题的描述和求解成为难以回避的课题. 然而, 接触问题又被认为是最困难的非线性力学问题之一, 从其数学结构分析, 不等式形式的接触约束条件是导致非线性的本质所在. 因此, 在力学模型中有效施加接触条件是成功求解接触问题的关键所在. 近年来, 借助于最优化领域处理不等式约束的方法, 如 Lagrange 乘子法、惩罚函数法、互补法、数学规划法、非光滑/半光滑方程组法等, 发展出了许多

求解摩擦接触问题的方法^[1-8].

我国钟万勰提出的求解摩擦接触问题的参变量变分原理^[3]是以惩罚函数为基础发展起来的, 经过多年的努力, 这一方法不断成熟, 并在若干非线性分析中得到了成功的应用^[3,9]. 为了克服惩罚类算法所固有的缺点, 在钟万勰等^[3]给出的算法具体实现过程中, 启用了子结构技术和有限元编程技巧, 在最终的求解列式中消除了罚因子, 从而在数值计算中避免了惩罚参数显式趋于无穷大而导致的困难, 这一手法提高了参变量变分原理求解摩擦接触问题的鲁棒性.

收稿日期: 2009-04-23; 修回日期: 2009-09-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60675046); 天津科技大学引进人才科研启动基金资助项目(20070430)

作者简介: 李建宇(1978—), 男, 呼和浩特人, 内聘副教授, lijianyu@tust.edu.cn.

增广 Lagrange 乘子法是为了克服罚函数法的缺点而提出的一种施加约束的最优化方法,它可以被视为一种约束优化问题的精确正则化方法,该方法无需过大的罚因子就可以获得高精度的解. 在 1992 年以后,基于增广 Lagrange 乘子法构造的摩擦接触算法由于其多重优点而成为一类颇为流行的方法^[10]. 然而,这一思想却一直未被摩擦接触问题的参变量二次规划法所吸纳. 为此,本文给出摩擦接触问题参变量二次规划分析的增广 Lagrange 算法. 研究表明,增广 Lagrange 思想的引入,使得在不消除罚因子的前提下,摩擦接触问题的参数二次规划法能够避免数值病态,并获得高精度解. 新的方法更加易于编程实现,从而有助于将摩擦接触问题的参数二次规划法在各类有限元模块中推广应用.

1 接触条件的增广 Lagrange 线性互补表述

为便于比较,沿用文献[3]的表述方式和假设条件. 考虑二维问题,考虑由两个物体 $B^{(1)}$ 和 $B^{(2)}$ 组成的接触体系,设它们包含的区域分别为 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$,记 $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$. 一般地,物体的边界可以区分为给定外力边界 $S_p^{(\alpha)}$,给定位移边界 $S_u^{(\alpha)}$ 和可能发生接触的边界 $S_c^{(\alpha)}$,其中上标 $\alpha=1,2$ 代表两个物体. 体系的总边界 S 可以写成:

$$S = S_p + S_u + S_c = S_c + \sum_{\alpha=1}^2 (S_p^{(\alpha)} + S_u^{(\alpha)}) \quad (1)$$

并且在接触面两侧几乎处处满足

$$\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)} = -\boldsymbol{\tau}^{(2)}$$

其中, $\mathbf{n}^{(\alpha)}, \boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$) 分别为两物体的外法线单位矢量和切向单位矢量,为具体起见,以下均以 $\mathbf{n}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}$ 作为边界 S_c 上一点的局部坐标系,并在不致引起混淆的情况下,记为 $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}_2$,略去上标.

接触边界 S_c 上一点的接触位移用相对位移来描述

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \{\boldsymbol{\varepsilon}_\tau, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}^T \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau = u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)} = \Delta u_\tau$; $\boldsymbol{\varepsilon}_n = u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + \delta^* = \Delta u_n + \delta^*$. 这里, $u_\tau^{(\alpha)}, u_n^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$) 为物体 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$ 相对接触点局部坐标系下的切向及法向位移; δ^* 为两物体间的初始间隙.

在 S_c 上一点的接触力可分解为法向接触内力 p_n 和切向接触内力 p_τ ,即 $\mathbf{p}_c = \{p_\tau, p_n\}^T$. 接触边界上的接触力和接触位移之间应当满足如下两个定律:

(1) 法向单边接触定律

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_n = u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + \delta^* \geq 0 \\ p_n \leq 0 \\ p_n \boldsymbol{\varepsilon}_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中,各式的意义分别为非穿透条件、法向不受拉条件和互补条件.

(2) 切向 Coulomb 摩擦定律

$$\begin{cases} |p_\tau| < -\mu p_n \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_\tau = |u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)}| = 0 \\ |p_\tau| = -\mu p_n \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_\tau = |u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)}| \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中:第一式为粘贴条件,第二式为滑动条件; μ 为摩擦因数. 仿照理想刚塑性体单向应力应变关系的表述方式,式(3)和式(4)的摩擦接触条件还可以统一表述为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{g}} = \begin{Bmatrix} p_\tau + c_0 \\ -p_\tau + c_0 \\ p_n \end{Bmatrix}, \tilde{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} p_\tau + \mu p_n \\ -p_\tau + \mu p_n \\ p_n \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_c = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{p}_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0, \tilde{\mathbf{f}} \leq 0, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \tilde{\mathbf{f}} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\tilde{\mathbf{g}}$ 为接触滑动势函数; $\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{p}_c}$ 体现了接触面切向和法向相对滑动位移的方向; $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}^T$ 代表接触点切向和法向滑动量的大小; $\tilde{\mathbf{f}}$ 为接触滑动函数,

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{p}_c} = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ -1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{p}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

参变量变分原理求解摩擦接触问题时,文献[3]的作法是首先引入惩罚函数,将接触条件(5)转化为如下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_c = \mathbf{D}_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}_c - \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{p}_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) \\ \mathbf{f} = \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{p}_c} \right] \mathbf{D}_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}_c - \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{p}_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) \leq 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{f} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} E_\tau & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$ 为接触面弹性矩阵. 将式(6)称为惩罚-线性互补型接触条件,理论上它是一种惩罚近似. 为了足够精确地逼近原接触条件(5),理论上要求惩罚因子 $E_n, E_\tau \rightarrow \infty$. 然而,过大的罚因子又可能引起实际计算中的数值病态,这是一对矛盾. 文献[3]通过巧妙的矩阵前处理运算和子结构技巧,在最终的计算列式中消去了罚因子,从而避免可能得数值病态.

本文给出摩擦接触条件的另一种表述形式:

$$\begin{cases} p_c = p_c + D_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}_c - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) \\ f = \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_c} \right] p_c + \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_c} \right] D_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}_c - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) \leq 0 \quad (7) \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T f = 0 \end{cases}$$

不难证明,只需 $E_n, E_t > 0$ 的条件,摩擦接触条件(7)与标准摩擦接触条件(5)完全等价. 这是因为:

由式(7)中的第一式可得, $\boldsymbol{\varepsilon}_c - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 0$, 进而

有

$$f = \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_c} \right] p_c + \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_c} \right] D_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}_c - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) = \begin{cases} p_\tau + \mu p_n \\ -p_\tau + \mu p_n \\ p_n \end{cases} \leq 0,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T f = 0$$

式(7)的意义在于它提供了一个可实际操作的迭代格式:

$$\begin{cases} p_c^{(k+1)} = p_c^{(k)} + D_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}_c^{(k+1)} - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)} \right) \\ f = \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_c} \right] p_c^{(k)} + \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_c} \right] D_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}_c^{(k+1)} - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)} \right) \leq 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)} \geq 0 \\ \left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)} \right)^T f = 0 \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

联系数学规划中的增广 Lagrange 乘子法,迭代格式(8)中关于 p_c 的迭代准则与最优化算法中增广 Lagrange 乘子法中关于 Lagrange 乘子的迭代准则^[11]是相同的. 因此,将式(7)称为增广 Lagrange 线性互补型接触条件.

在实际计算过程中,随着迭代过程的进行,当 $\|p_c^{(k+1)} - p_c^{(k)}\| \rightarrow 0$ 时,接触条件(8)逼近接触条件(5). 参数 E_n, E_t 的大小对逼近的精度影响很小,它的主要作用体现在对迭代收敛速度和稳定性的改善上.

2 应用参变量变分原理求解摩擦接触问题

式(8)给出的接触条件,同时适用于二维和三维摩擦接触问题. 为了说明简单,下面仅以平面弹性摩擦接触问题为例,展示接触条件(8)在参变量变分原

理解摩擦接触问题中的应用.

2.1 增广 Lagrange 参变量最小势能原理

平面弹性接触力学边值问题在区域 $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$ 内应满足平衡方程、应变-位移关系、本构关系及边界条件,各方程的数学表述与文献[3]相同. 由文献[3]可给出描述平面弹性摩擦接触问题的增广 Lagrange 参变量最小势能原理:

对于给定的 p_c ,在所有满足几何方程和位移边界条件的可能位移场中,真实解使总势能泛函(9)在接触状态方程(7)的控制下取总体最小值.

$$\Pi[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \left[\int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{S_p} \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{u} dS \right] + \int_{S_c} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_c^T D_c \boldsymbol{\varepsilon}_c + p_c^T \boldsymbol{\varepsilon}_c - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \tilde{\mathbf{R}} \boldsymbol{\varepsilon}_c \right) dS \quad (9)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{R}}_{k\alpha} = \frac{\partial \tilde{g}_\alpha}{\partial p_{ci}} D_{cjk}, D_{cij} = \delta_{ij} E_\tau = \delta_{ij} E_n = \delta_{ij} E_c$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = [\boldsymbol{\varepsilon}_{c1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{c2}]^T = [\boldsymbol{\varepsilon}_\tau, \boldsymbol{\varepsilon}_n]^T, p_c = [p_{c1}, p_{c2}]^T = [p_\tau, p_n]^T$$

$i, j, k = 1, 2, \alpha = 1, 2, 3$

上述参变量变分原理的策略就是作系统能量指标泛函 $\Pi[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)]$ 对状态变量的变分,而让参变量 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ 和接触力 p_c 不参加变分,以给出平衡方程,这样得出的平衡方程中必含有 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ 和 p_c ,其留待状态方程来决定,以满足问题的本构关系. 由 \mathbf{D} 和 D_c 的对称正定性可知, $\delta^2 \Pi[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot), p_c] \geq 0$,可保证真解势能的总体最小. 限于篇幅,证明从略.

2.2 增广 Lagrange 线性互补有限元列式及其算法

对两接触体 $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$ 进行有限元网格划分,设划分后的单元总数为 n_E ,自由度数为 n_u ,若每个单元所占区域为 Ω_e ,则 $\Omega = \sum_{e=1}^{n_E} \Omega_e$. 在 S_c 边界上用 n_c 个接触单元进行划分,使 $S_c = \sum_{e=1}^{n_c} S_c^e$. 令 m_f 表示接触系统中接触约束的总数,则 $m_f = 3n_c$. 引入位移插值形函数 N ,经过一系列常规的公式推导,则离散后的系统总势能为

$$\Pi[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)] = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\boldsymbol{\Phi} \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{p} - p_c) \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_E} \int_{\Omega_e} \mathbf{T}_u^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{T}_u^e d\Omega + \sum_{e=1}^{n_c} \int_{S_c^e} \mathbf{T}_c^{eT} \mathbf{N}_c^{eT} \mathbf{D}_c^e \mathbf{N}_c^e \mathbf{T}_c^e dS$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{e=1}^{n_c} \int_{S_c^e} \mathbf{T}_c^{eT} \mathbf{N}_c^{eT} \tilde{\mathbf{R}}^e \mathbf{T}_\lambda^e dS$$

$$p = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} T_u^{eT} N^{eT} b d\Omega + \int_{S_p^e} T_u^{eT} N^{eT} \bar{p} dS \right) - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_c^e} T_c^{eT} N_c^{eT} D_c^e N_c^e \delta_c^* dS, p_c = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_c^e} T_c^{eT} p_c^e dS$$

式中: T_u^e, T_c^e 为单元出口节点位移向量 u^e 及单元出口点接触位移向量 u_c^e 到总体控制位移向量 u 之间的转换阵; T_λ^e 为单元参变量 $\tilde{\lambda}^e$ 与总体参变量 $\bar{\lambda}$ 之间的关系矩阵, 即 $u^e = T_u^e u, u_c^e = T_c^e u, \tilde{\lambda}^e = T_\lambda^e \bar{\lambda}$. 而 $\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}^1, \bar{\lambda}^2, \dots, \bar{\lambda}^{n_c}]^T, \tilde{\lambda}^e = [\tilde{\lambda}_1^e, \tilde{\lambda}_2^e, \tilde{\lambda}_3^e]^T$, 将接触系统状态方程 (7) 化成离散后的矩阵形式为

$$\begin{cases} Cu - U\bar{\lambda} - d_\delta - d_c + \bar{v} = 0 \\ \bar{\lambda} \geq 0, \bar{v} \geq 0, \bar{v}^T \bar{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} C &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_c^e} T_\lambda^{eT} \tilde{W}^e N_c^e T_c^e dS \\ U &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_c^e} T_\lambda^{eT} \tilde{m}^e T_\lambda^e dS \\ d_\delta &= - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_c^e} T_\lambda^{eT} \tilde{W}^e T_\delta^e dS \cdot \delta_c^* \\ d_c &= - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_c^e} T_\lambda^{eT} \left[\frac{\partial \tilde{f}^e}{\partial p_c} \right] p_c^e dS \\ \bar{v} &= [\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^{n_c}]^T, \tilde{v}^e = [\tilde{v}_1^e, \tilde{v}_2^e, \tilde{v}_3^e]^T \\ \tilde{W}^e &= \left[\frac{\partial \tilde{f}^e}{\partial p_c} \right] D_c, \tilde{m}^e = \left[\frac{\partial \tilde{f}^e}{\partial p_c} \right] D_c \left[\frac{\partial \tilde{g}^e}{\partial p_c} \right] \end{aligned}$$

因此, 有限元离散后, 平面弹性接触问题的增广 Lagrange 参变量最小势能原理可转化为由式 (10) 和 (11) 组成的参数二次规划问题, 经过一系列的推导, 可将其进一步转化为下列线性互补问题:

$$\begin{cases} \bar{v} - (U - CK^{-1}\Phi)\bar{\lambda} = -CK^{-1}p + d_\delta + CK^{-1}p_c + d_c \\ \bar{v}^T \bar{\lambda} = 0, \bar{v} \geq 0, \bar{\lambda} \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

若令 $M = U - CK^{-1}\Phi, q = -CK^{-1}p - d_\delta, \bar{r}_c = CK^{-1}p_c + d_c$, 则式 (12) 可简写为

$$\begin{cases} \bar{v} - M\bar{\lambda} = q + \bar{r}_c(p_c) \\ \bar{v} \geq 0, \bar{\lambda} \geq 0, \bar{v}^T \bar{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

这是一个标准的线性互补问题, 但它包含了 3 类未知变量: $\bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}_c$. 在计算过程中, 首先给定 $\bar{r}_c(p_c)$, 然后, 通过线性互补问题 (13) 求解 $\bar{v}, \bar{\lambda}$. $\bar{r}_c(p_c)$ 中的 p_c 按下式迭代:

$$p_c^{(k+1)} = p_c^{(k)} + D_c \left(\epsilon_c^{(k)} - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\lambda}^{(k)} \right), k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

据此, 给出如下摩擦接触问题的增广 Lagrange 线性互补算法:

- (1) 初始化, 设定接触刚度矩阵 $D_c > 0$, 收敛准则参数 $\omega > 0$. 令 $p_c^{(0)} = 0, k = 0$;
- (2) 确定 \bar{r}_c , 即 $\bar{r}_c^{(k)} = \bar{r}_c(p_c^{(k)})$; 通过求解线性互补问题 (13) 求得 $(u^{(k)}, \bar{\lambda}^{(k)})$;
- (3) 由式 (14) 得 $p_c^{(k+1)}$;
- (4) 判断收敛, 若 $\left\| \epsilon_c^{(k)} - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\lambda}^{(k)} \right\| \leq \omega$ 收敛, 迭代终止, 否则, 令 $k = k + 1$, 转 (2).

3 应用实例

3.1 算例 1

如图 1 所示, 一个截面为圆形的弹性圆柱体同刚性基础的接触, 这是一个经典的 Hertz 接触问题. 该问题可以模型化为平面应变问题: 力 $F = 1.5288 \text{ kN}$, 弹性模量 $E = 19.60 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 截面半径 $R = 8 \text{ cm}$, 并取 1/4 结构进行分析. 有限元模型中 1/4 柱体剖分为 225 个平面四边形四节点等参元, 接触边界划分为 15 个平面点接触单元.

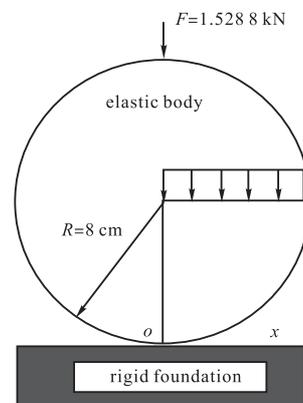


图 1 刚性基础上的弹性圆柱
Fig.1 Anelastic cylinder on the rigid foundation

计算过程中, 设定算法的迭代终止条件为

$$\left\| \epsilon_c^{(k)} - \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right)^T \tilde{\lambda}^{(k)} \right\| \leq 10^{-4}$$

首先考证算法的有效性, 设定接触刚度 $E_n = E_t = 10E$, 分别计算摩擦因数 $\mu = 0, \mu = 0.4$ 的结果, 并与无摩擦的 Hertz 解做比较. 图 2 给出 $\mu = 0.4$ 的计算结果, 可见, 本文算法是正确有效的.

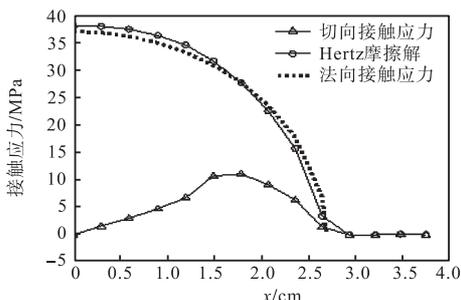


图2 摩擦系数 $\mu = 0.4$ 时的接触应力分布
Fig.2 Distribution of contact stress ($\mu=0.4$)

前文指出,罚因子的选取对于算法的精度不会有太大影响,但会影响算法的收敛速度. 下面的计算经验表明了这一观点. 以摩擦系数 $\mu = 0.4$ 的问题为例, 分别选取 $E_n = E_\tau = \{0.1E, E, 10E, 100E\}$ 进行计算, 考察算法的收敛性. 由图 3 给出的收敛曲线可见, 计算均稳定地收敛到设定的精度要求. 但对比图中不同的曲线, 发现不同的罚因子大小会导致算法不同的收敛速度, 可定性地认为随着惩罚因子的增大, 算法的收敛速度会加快.

从计算量的角度考虑, 本文算法要求多次求解线性互补问题(13), 其中迭代的第一步所求解的互补问题与文献[3]中所求解的互补问题相同. 显然, 本文算法会增加计算量. 为了考证计算量的增加幅度, 对摩擦系数 $\mu = 0.4$, 惩罚因子选为 $E_n = E_\tau = E$ 的模型进行

计算. 其中线性互补问题(13)采用文献[7]给出的基于 NCP 函数的方程组类算法求解, 经过 8 次迭代算法收敛. 表 1 给出不同迭代步内求解线性互补问题所需的运算时间. 从表中的数据可见, 随着迭代的进行, 各迭代步内求解互补问题的计算时间较首次计算互补问题有显著下降. 从理论上讲, 随着迭代的进行, 各迭代步内所求解互补问题的初始值也越来越接近真解, 因而计算量要比首次求解(13)有显著下降. 算法的计算总耗时约为首次计算时间的 2 倍, 在即能够保证精度又能避免数值病态的前提下, 这种代价是值得付出的.

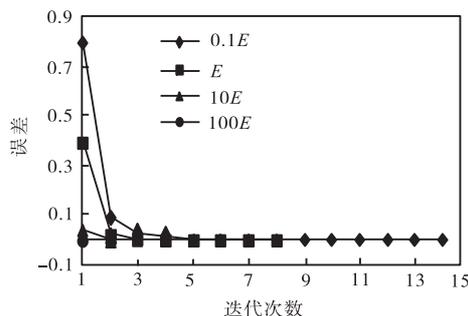


图3 不同大小惩罚因子的算法收敛过程
Fig.3 Convergence of the algorithm corresponding to different penalties

表 1 各迭代步内求解线性互补问题所耗时

Tab.1 CPU time of solving LCP (3.13) in each iterative

迭代步	1	2	3	4	5	6	7	8	总时间/s
运算时间/s	0.504	0.107	0.071	0.081	0.138	0.051	0.036	0.039	1.029

3.2 算例 2

悬臂梁接触问题^[13]如图 4 所示, 几何、材料和荷载参数为: $L = 1 \text{ m}$, $H = 0.1 \text{ m}$, $q_n = 2.0 \text{ MN/m}$; 弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0$. 用平面应力四节点单元离散化, 共划分 80 个单元, 126 个节点, 20 个点接触单元. 分别计算无摩擦和有摩擦情形, 其中有摩擦情形考虑摩擦系数分别为 $\mu = 0.2$ 和 $\mu = 0.7$. 采用本文算法计算时, 接触刚度的大小均取为 E , 设定算法的收敛精度为

$$\left\| \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(k)} - \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{p}_c} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \right\| \leq 10^{-6}.$$

结果三种工况均迭代 2 次即收敛.

结果比较: 文献[13]中, 无摩擦时, 位于上部的梁的最大挠度 6.717 mm, 本文算法结果为 6.717 mm; 文献[13]中, 有摩擦情况(摩擦系数 $\mu = 0.2$)时, 位于上

部的梁的最大挠度为 6.550 mm, 本文算法结果为 6.540 mm.

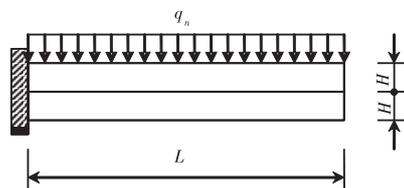


图4 两个悬臂梁的接触
Fig.4 Contact of two cantilever beams

4 结论

本文通过将增广 Lagrange 乘子法的思想引入参变量变分原理中, 构造了求解摩擦接触问题的参变量二次规划分析的增广 Lagrange 线性互补算法. 算法

的显著优点是在不需要过大的惩罚因子就能获得高精度的解. 因而省去了原参变量二次规划法中为避免过大惩罚因子引起计算困难而启用的前处理技巧, 从而简化了编程的难度, 有助于将参变量变分原理求解摩擦接触问题的算法装入各类通用有限元模块中.

参考文献:

- [1] Wriggers P. Computational contact mechanics[M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd, 2002.
- [2] Laursen T A. Computational contact and impact mechanics [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
- [3] 钟万勰, 张洪武, 吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [4] 李学文, 陈万吉. 三维接触问题的非光滑算法[J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 43-49.
- [5] Christensen Peter W. A semi-smooth Newton method for elasto-plastic contact problem[J]. International Journal of Solids Struct, 2002, 39: 2323-2341.
- [6] Klarbring A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, 58: 175-200.
- [7] 张培爱, 何素燕, 李建宇, 等. 工程力学中的互补问题: 算法[J]. 计算力学学报, 2006, 23(6): 696-699.
- [8] 陈万吉, 胡志强. 三维摩擦接触问题算法精度和收敛性研究[J]. 大连理工大学学报, 2003, 43(5): 541-547.
- [9] Zhang H W, Zhong W X, Wu C H, et, al. Some advances and applications in quadratic programming method for numerical modeling of elastoplastic contact problems[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2006, 48(2): 176-189.
- [10] Simo J C, Laursen T A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction[J]. Computers and Structures, 1992, 42: 97-116.
- [11] Nocedal J, Wright S J. Numerical Optimization[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [12] 何素艳, 李建宇, 张洪武, 等. 工程力学中的互补问题: 模型[J]. 计算力学学报, 2004, 21(2): 185-190.
- [13] 李学文, 陈万吉. 摩擦接触问题的一种非光滑算法[J]. 北京理工大学学报, 2002, 22(5): 549-552.

(上接第49页)

流动软固体没有更好的测量方法. 流量测量方法简单可行, 但需要控制采样时间和均匀加料, 采样时间不能太短.

(4) 在实验过程中由于频繁打开机筒, 装卸螺杆, 更换螺杆组合, 所以采用人工加料, 而实际生产中采用螺旋推进器加料. 人工加料的强度可能低于机械加料方式, 这会影响到测量结果的准确性, 但参数改变时, 其变化规律是一致的.

致谢: 作者向在本文的实验研究期间给予帮助的王高升教授, 董建涛, 白宇, 袁贵星硕士, 张军娥, 郑志军等同学表示衷心的感谢!

参考文献:

- [1] 王平, 沈晓阳. 双螺杆磨浆机设计理论的研究与进展[J]. 天津科技大学学报, 2007, 22(3): 84-88.
- [2] 朱复华. 螺杆设计及其理论基础[M]. 北京: 轻工业出版社, 1984.
- [3] 北京化工大学, 华南理工大学. 塑料机械设计[M]. 北京: 中国轻工业出版社, 1995.
- [4] 耿孝正. 双螺杆挤出机及其应用[M]. 北京: 中国轻工业出版社, 2003.
- [5] Klemens Kohlgruber. Co-rotating twin-screw extruders fundamentals, technology, and applications[M]. Munich: HANSER, 2008.
- [6] 张有颐. 转矩测量技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.
- [7] 商维绿. 现代扭矩测量技术[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1999.
- [8] 张凤生, 师忠秀, 徐志良, 等. 动态转矩测量技术的研究[J]. 现代计量测试, 1997(6): 10-14.
- [9] 罗建明. 传感技术在压力测量中的运用[J]. 工业计量, 2001(S1): 310-311.
- [10] 杜水友. 压力测量技术及仪表[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [11] 吴宗泽. 机械零件设计手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.