第 24 卷 第 3 期
2009 年 6 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.24 No. 3
Jun. 2009

# Banach 序列空间 *ss*(*E*)的弱暴露点

于非非，李 君
（天津科技大学理学院，天津 300457）

**摘 要**：赋序列范数的矢值序列空间 $ss(E)$ 是 Banach 序列空间 $l_p(E)$ 的推广,其几何性质的讨论是 Banach 空间理论的重要组成部分. 给出了 Banach 序列空间 $ss(E)$ 的弱暴露点的判定方法;并且在附加条件 $ss$ 严格单调的前提下,证明了以上结论的逆命题.

**关键词**：矢值序列空间；序列范数；弱暴露泛函；弱暴露点
**中图分类号**：O177.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6510（2009）03-0075-04

## Weak Exposed Points in Banach Sequence Spaces *ss*(*E*)

YU Fei-fei，LI Jun
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

**Abstract**：Vector valued sequence spaces $ss(E)$ with the sequential norms are generalization of Banach sequence spaces $l_p(E)$, the discussion on the geometric properties of $ss(E)$ is important in the theory of the Banach spaces. The criteria of the weak exposed points in Banach sequence spaces $ss(E)$ were obtained and the converse proposition of above conclusion was proved with the additional condition that $ss$ is strictly monotone.

**Keywords**：Vector valued sequence space；sequential norms；weak exposed functional；weak exposed point

1977 年,Diestel 和 Vhi 写了 *Vector Measures* 一书,对向量测度、RNP 及 Banach 空间理论的许多方面做了很好的阐述. 近几十年来,向量测度理论发展迅速,由于核空间及 Schauder 分解理论研究的需要,引进了矢值序列空间,许多数学工作者对矢量值序列空间性质进行了多方面的探讨,取得了大量的研究成果.

$E$ 表示 Banach 空间,对 $x=\{x(i)\}$,记 $\operatorname{supp} x=\{i\in Z^+: x(i)\neq 0\}$,$\omega(E)$ 表示全体矢值序列 $x=\{x(i)\}$ 组成的空间,其中 $x(i)\in E$,$i\in Z^+$;设 $\Phi(E)$ 表示全体 $E$ 值有限序列(有限个非零分量)所组成的空间. 对于 $x=\{x(i)\}\in\omega(E)$,记 $x^N=(x(1),x(2)\cdots x(N),0,\cdots)$,$\rho$ 表示序列范数[1],以下恒设 $ss\supset\Phi$ 是赋单调的序列范数的结实的实数序列空间,其中 $\Phi$ 是全体有限序列组成的线性空间,$ss(E)$ 表示全体使得 $|x|=\{\|x(i)\|_E\}\in ss$ 的 $E$ 值序列 $x=\{x(i)\}$ 所组成的线性空间,即 $ss(E)=\left\{x\in\omega(E):|x|=\left\{\|x(i)\|_E\right\}\in ss\right\}$,在范数 $\|x\|=\|x\|_{ss}$ 意义下 $ss(E)$ 成为赋序列范数的矢值序列空间. $ss(E)$ 的 Kothe 对偶为

$$ss(E)^{\alpha}=\left\{f=\{f(i)\}: f(i)\in E^*,\forall i\in Z^+,\ |f|=\left\{\|f(i)\|_{E^*}\right\}\in ss^{\alpha}\right\}$$

并且在 $ss(E)^{\alpha}$ 中赋予范数 $\|f\|=\||f|\|_{ss^{\alpha}}$,则 $ss(E)^{\alpha}$ 也是赋序列范数的矢值序列空间.

对 Banach 空间 $E$,$S(E)$ 与 $B(E)$ 分别表示 $E$ 的单位球面及单位球,$E^*$ 为 $E$ 的共轭空间,$\sum(x)=\left\{f\in E^*:\|f\|=1, f(x)=\|x\|\right\}$.

**定义** 对一个 Banach 空间 $E$,$x\in S(E)$ 称为 $B(E)$ 的弱暴露点,若存在 $f\in\sum(x)$,对任意的序列 $\{x_n\}\subset B(E)$,且 $\langle x_n, f\rangle\to 1$,则 $x_n\xrightarrow{w}x$ 于 $E$,此时称 $f$ 为 $x$ 的弱暴露泛函(或 $f$ 弱暴露 $x$).

**引理 1**[1] 若 $ss$ 有 AK 性质,则 $ss^*=ss^{\alpha}$,这里对

**收稿日期**：2008-09-17；**修回日期**：2008-12-30
**基金项目**：天津科技大学科学研究基金资助项目（20080205）
**作者简介**：于非非（1975—），女，吉林农安人，讲师，yuff _ 75@yahoo.com.cn.

$y=\{y(i)\}\in ss^{\alpha}$，定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x(i)y(i),\ \ x=\{x(i)\}\in ss$$

**引理 2**[1]　若 $ss$ 有 AK 性质，则 $ss(E)^{*}=ss(E)^{\alpha}$，对于 $f=\{f(i)\}\in ss(E)^{\alpha}$，定义

$$\langle x,f\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x(i),f(i)\rangle,\ \ x=\{x(i)\}\in ss(E)$$

**引理 3**[1]　设 $ss,\ ss^{*}$ 有 AK 性质，$x_n=\{x_n(i)\},x=\{x(i)\}\in ss(E)$，则 $x_n\xrightarrow{w}x$ 于 $ss(E)\Leftrightarrow x_n(i)\xrightarrow{w}x(i)$ 于 $E$，$\forall i\in Z^{+}$，$\sup\limits_{n}\|x_n\|<\infty$.

文中其他定义和记号参照文献[1].

关于赋序列范数的矢值序列空间 $ss(E)$ 的几何性质，已经有一些研究成果，见文献[2–6]，本文将讨论 $ss(E)$ 的弱暴露点的判别问题.

**结论 1**　若 $ss,\ ss^{*}$ 有 AK 性质，$ss^{*}$ 严格单调，$x\in ss(E)$，$\|x\|=1$，且满足

(1) $|x|=\{\|x(i)\|_E\}$ 是 $B(ss)$ 的弱暴露点；

(2) $\forall i\in \operatorname{supp}x$，$\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}$ 是 $B(E)$ 的弱暴露点；则 $x$ 是 $B(ss(E))$ 的弱暴露点.

**证明：**已知 $ss$ 有 AK 性质，从而由引理 1 和引理 2 有 $ss^{*}=ss^{\alpha}$，$ss(E)^{*}=ss(E)^{\alpha}$，由于 $|x|=\{\|x(i)\|_E\}$ 是 $B(ss)$ 的弱暴露点，于是存在 $y\in ss^{\alpha}$ 是 $|x|$ 的弱暴露泛函，所以 $\|y\|_{ss^{\alpha}}=1$，$y(|x|)=1$，因为

$$\begin{aligned}1=y(|x|)&=\sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_E\,y(i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_E\,|y(i)|=\\&\sum_{i\in\operatorname{supp}x}\|x(i)\|_E\,|y(i)|=|y|_{\operatorname{supp}x}(|x|_{\operatorname{supp}x})\leqslant\\&\big\||x|_{\operatorname{supp}x}\big\|_{ss}\big\||y|_{\operatorname{supp}x}\big\|_{ss^{*}}\leqslant\big\||y|_{\operatorname{supp}x}\big\|_{ss^{*}}\leqslant\\&\big\|y\big\|_{ss^{*}}=\|y\|=1\end{aligned}\tag{1}$$

从而得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_E\,y(i)=\sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_E\,|y(i)|$$

而 $\forall i\in Z^{+}$ 有

$$\|x(i)\|_E\,y(i)\leqslant\|x(i)\|_E\,|y(i)|$$

结合以上两式有

$$\|x(i)\|_E\,y(i)=\|x(i)\|_E\,|y(i)|$$

于是　$\|x(i)\|_E\,y(i)\geqslant 0,\ \forall i\in Z^{+}$.

(1) 当 $i\in\operatorname{supp}x$ 时，$\|x(i)\|_E<0$，当然有 $y(i)\geqslant 0$；

(2) 当 $i\notin\operatorname{supp}x$ 时，若存在 $i_0\in Z^{+},i_0\notin\operatorname{supp}x$ 但 $y(i_0)\neq 0$，则 $|y|\geqslant|y|_{\operatorname{supp}x}$，而且 $|y|\neq|y|_{\operatorname{supp}x}$. 因为 $ss^{*}$ 是严格单调的，于是结合式(1)的推导有

$$\|y\|_{ss^{\alpha}}=\|y\|_{ss^{\alpha}}>\big\||y|_{\operatorname{supp}x}\big\|_{ss^{\alpha}}$$

而由式(1)的推导又有 $\|y\|_{ss^{\alpha}}=\big\||y|_{\operatorname{supp}x}\big\|_{ss^{\alpha}}$，这与上式是矛盾的，于是，当 $i\notin\operatorname{supp}x$ 时 $y(i)=0$.

由条件(2)知，$\forall i\in\operatorname{supp}x$，$\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}$ 是 $B(E)$ 的弱暴露点，从而存在 $z(i)\in\sum\left(\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}\right)$ 是 $\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}$ 的弱暴露泛函，不妨设 $i\notin\operatorname{supp}x$ 时 $z(i)=0$. 令

$$f=\{f(i)\}=\{y(i)z(i)\}$$

则 $\forall i\in Z^{+}$，有 $f(i)\in E^{*}$，而且 $\forall i\in Z^{+}$ 有

$$\|f(i)\|_{E^{*}}=\|y(i)z(i)\|_{E^{*}}=|y(i)|\|z(i)\|_{E^{*}}=y(i)$$

于是

$$|f|=\{\|f(i)\|_{E^{*}}\}=\{y(i)\}=y\in ss^{\alpha}$$

这就说明了 $f\in ss(E)^{\alpha}$，$\|f\|=\|y\|_{ss^{\alpha}}=1$. 与此同时注意到

$$\begin{aligned}f(x)=\langle x,f\rangle&=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x(i),f(i)\rangle=\\&\sum_{i=1}^{\infty}y(i)\langle x(i),z(i)\rangle=\\&\sum_{i\in\operatorname{supp}x}y(i)\langle x(i),z(i)\rangle=\\&\sum_{i\in\operatorname{supp}x}y(i)\|x(i)\|_E=\langle|x|,y\rangle=1\end{aligned}$$

即 $f\in\sum(x)$.

对任意的 $\{x_n\}\subset ss(E),\|x_n\|\leqslant 1$ 且 $\langle x_n,f\rangle\to 1$，因为

$$\begin{aligned}1\leftarrow\langle x_n,f\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x_n(i),f(i)\rangle&=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x_n(i),y(i)z(i)\rangle=\\&\sum_{i=1}^{\infty}y(i)\langle x_n(i),z(i)\rangle\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}y(i)\langle x_n(i),z(i)\rangle\to 1.$$

为方便设 $h_n=\{h(i)\}=\{\langle x_n(i),z(i)\rangle\}$ 则

$$\begin{aligned}|h_n(i)|&=|\langle x_n(i),z(i)\rangle|\leqslant\\&\|x_n(i)\|_E\|z(i)\|_{E^{*}}\leqslant\|x_n(i)\|_E\end{aligned}$$

由于 $ss$ 是赋绝对单调的序列范数的结实的实数序列空间，所以 $h_n\in ss$，而且

$$\|h_n\|_{ss}\leqslant\|x_n\|_{ss}\leqslant 1;\ \langle h_n,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}y(i)\langle x_n(i),z(i)\rangle\to 1$$

因为 $y$ 是 $|x|$ 的弱暴露泛函，所以

$$h_n\xrightarrow{w}|x|\quad 于 ss\tag{2}$$

由于

$$\begin{aligned}1\leftarrow\langle x_n,f\rangle&=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x_n(i),f(i)\rangle=\\&\sum_{i=1}^{\infty}\langle x_n(i),y(i)z(i)\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}y(i)\langle x_n(i),z(i)\rangle=\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} y(i)\|x_n(i)\|_E = \langle |x_n|, y\rangle \leqslant \|x_n\|\|y\|_{ss^\alpha} \leqslant 1$$

于是 $\langle |x_n|, y\rangle \to 1$，因为 $y$ 是 $|x|$ 的弱暴露泛函有

$$|x_n| \xrightarrow{w} |x| \quad 于 ss \tag{3}$$

由式(2)得 $h_n(i) \to \|x(i)\|_E \quad \forall i \in Z^+$，即

$$\langle x_n(i), z(i)\rangle \to \|x(i)\|_E \quad \forall i \in Z^+$$

由式(3)得 $\|x_n(i)\|_E \to \|x(i)\|_E$. 当 $i \in \operatorname{supp} x$ 时，因为 $\langle x_n(i), z(i)\rangle - \|x_n(i)\|_E \to 0$，所以

$$\left\langle \frac{x_n(i)}{\|x_n(i)\|_E}, z(i)\right\rangle \to 1$$

因为 $z(i)$ 是 $i \in \operatorname{supp} x$ 时 $\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}$ 的弱暴露泛函，所以

$$\frac{x_n(i)}{\|x_n(i)\|_E} \xrightarrow{w} \frac{x(i)}{\|x(i)\|_E}$$

进而得到 $x_n(i) \xrightarrow{w} x(i)$，$i \in \operatorname{supp} x,\ n \to \infty$. 当 $i \notin \operatorname{supp} x$ 时，$x(i) = 0$，此时显然有 $x_n(i) \xrightarrow{w} x(i)$，这样就证明了

$$x_n(i) \xrightarrow{w} x(i) \quad \forall i \in Z^+$$

又由于 $\|x_n\| \leqslant 1$，结合上式有

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad 于 ss(E)$$

从而证明了 $x$ 是 $B(ss(E))$ 的弱暴露点.

若附加条件 $ss$ 严格单调，则有如下结论.

**结论 2**　$ss$, $ss^*$ 有 AK 性质，$ss^*$ 与 $ss$ 严格单调，$x \in ss(E)$，$\|x\| = 1$，若 $x$ 是 $B(ss(E))$ 的弱暴露点，则

(1) $|x| = \{\|x(i)\|_E\}$ 是 $B(ss)$ 的弱暴露点；

(2) $\forall i \in \operatorname{supp} x$，$\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}$ 是 $B(E)$ 的弱暴露点.

**证明**　已知 $x$ 是 $B(ss(E))$ 的弱暴露点，所以存在 $f \in \sum(x)$ 是 $x$ 的弱暴露泛函，从而

$$\begin{aligned}1 = f(x) = \langle x, f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x(i), f(i)\rangle \leqslant \\ \sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_E\,\|f(i)\|_{E^*} = \sum_{i=1}^{\infty}\langle |x(i)|, |f(i)|\rangle = \\ \langle |x|, |f|\rangle \leqslant \|x|_{\operatorname{supp} f}\|_{ss}\,\|f|_{\operatorname{supp} f}\|_{ss^*} = \\ \|x|_{\operatorname{supp} f}\|_{ss} \leqslant 1\end{aligned} \tag{4}$$

由式(4)结合 $ss$ 的单调性得 $\operatorname{supp} x = \operatorname{supp} f$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x(i), f(i)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\|x(i)\|_E\,\|f(i)\|_{E^*}$$

而　$\langle x(i), f(i)\rangle \leqslant \|x(i)\|_E\,\|f(i)\|_{E^*}$，所以得到了

$$\langle x(i), f(i)\rangle = \|x(i)\|_E\,\|f(i)\|_{E^*} \quad \forall i \in Z^+$$

进而 $\forall i \in \operatorname{supp} x$ 有 $\left\langle \dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}, \dfrac{f(i)}{\|f(i)\|_{E^*}}\right\rangle = 1$，即

$i \in \operatorname{supp} x$ 时 $\dfrac{f(i)}{\|f(i)\|_{E^*}} \in \sum\left(\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}\right)$

对于 $z_n(i) \in E, \|z_n(i)\|_E \leqslant 1$，且满足

$$\left\langle z_n(i), \frac{f(i)}{\|f(i)\|_{E^*}}\right\rangle \to 1.$$

令 $y_n = \{x(1), x(2), \cdots x(i-1), \|x(i)\|_E\, z_n(i),\ x(i+1), \cdots\}$

显然 $|y_n| \leqslant |x|$，于是 $y_n \in ss(E)$，而且有

$$\|y_n\| = \|y_n\|_{ss} \leqslant \|x\|_{ss} = \|x\| = 1 \text{ 及}$$

$$\begin{aligned}\langle y_n, f\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle y_n(j), f(j)\rangle = \\ &\sum_{j\neq i}\langle y_n(j), f(j)\rangle + \langle y_n(i), f(i)\rangle = \\ &\sum_{j\neq i}\langle x(j), f(j)\rangle + \|x(i)\|_E\,\langle z_n(i), f(i)\rangle = \\ &\sum_{j\neq i}\langle x(j), f(j)\rangle + \|x(i)\|_E\,\|f(i)\|_{E^*} = \\ &\sum_{j=1}^{\infty}\langle x(j), f(j)\rangle = \langle x, f\rangle = 1\end{aligned}$$

而 $f$ 是 $x$ 的弱暴露泛函，所以 $y_n \xrightarrow{w} x$　于 $ss(E)$，当然有 $y_n(j) \xrightarrow{w} x(j)$ 于 $E$，$\forall j \in Z^+$ 和 $y_n(i) \xrightarrow{w} x(i)$ 于 $E$，于是

$$z_n(i) \xrightarrow{w} \frac{x(i)}{\|x(i)\|_E} \quad 于 E$$

这就证明了 $\forall i \in \operatorname{supp} x$，$\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E}$ 是 $B(E)$ 的弱暴露点.

由式(4)的推导知 $\langle |x|, |f|\rangle = 1$，设 $\{y_n\} \subset ss$ 且 $\|y_n\|_{ss} \leqslant 1, \langle y_n, |f|\rangle \to 1$. 取 $p \in S(E)$，设 $x_n = \{x_n(i)\}$，其中

$$x_n(i) = \begin{cases} y_n(i)\dfrac{x(i)}{\|x(i)\|_E} & i \in \operatorname{supp} x \\ y_n(i)\,p & i \notin \operatorname{supp} x\end{cases}$$

显然 $x_n(i) \in E$ 且 $\|x_n(i)\|_E = |y_n(i)|$，从而 $|x_n| \in ss$, $x_n \in ss(E)$，同时 $\|x_n\| = \|x_n\|_{ss} = \|y_n\|_{ss} \leqslant 1$，所以结合前面的分析有

$$\begin{aligned}f(x_n) = \langle x_n, f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x_n(i), f(i)\rangle = \\ \sum_{i\in\operatorname{supp} x}\langle x_n(i), f(i)\rangle = \\ \sum_{i\in\operatorname{supp} x} y_n(i)\left\langle \frac{x(i)}{\|x(i)\|_E}, f(i)\right\rangle = \\ \sum_{i\in\operatorname{supp} x} y_n(i)\|f(i)\|_{E^*} = \langle y_n, |f|\rangle \to 1\end{aligned}$$

而 $f \in \sum(x)$ 是 $x$ 的弱暴露泛函，于是有 $x_n \xrightarrow{w} x$ 于 $ss(E)$，进而有

$$x_n(i) \xrightarrow{w} x(i) \text{ 于 } E \quad \forall i \in Z^+$$

$i \in \operatorname{supp} x$ 时，由 $x_n(i)$ 的构造知

$$y_n(i)\frac{x(i)}{\|x(i)\|_E} \xrightarrow{w} x(i)\text{ 于 }E\text{，所以 }y_n(i) \to \|x(i)\|_E .$$

$i \notin \operatorname{supp} x$ 时，$y_n(i)p \xrightarrow{w} \theta$ 于 $E$，所以 $y_n(i) \to 0 = \|x(i)\|_E$.

综合以上分析有 $y_n(i) \to \|x(i)\|_E$　$\forall i \in Z^+$，结合 $\|y_n\|_{ss} \leqslant 1$ 知 $y_n \xrightarrow{w} |x|$，所以 $|x|$ 是 $B(ss)$ 的弱暴露点.

**参考文献：**


［1］ 刘郁强，吴博儿，李秉彝. 序列空间方法［M］. 广州：广东科技出版社，1996：125–401.

［2］ 林贵华. 关于矢值序列空间 $l_p(X_n)$［J］. 南开大学学报：自然科学版，1992(3)：6–15.

［3］ 南朝勋. $l_p(X_i)$ 的凸性［J］. 数学杂志，1988，8(2)：191–196.

［4］ 冯国臣，任丽伟. 矢值序列空间 $ss(E)$ 的端点和一致 $\lambda$-性质［J］. 北方交通大学学报，1999，23(2)：79–83.

［5］ 冯国臣，任丽伟. 矢值序列空间 $ss(E)$ 的局部完全 $k$-凸［J］. 北方交通大学学报，2004，28(3)：4–6.

［6］ 任丽伟，冯国臣. 赋序列范数的矢值 Banach 序列空间 $ss(E)$ 的凸性［J］. 数学研究与评论，2005，25(1)：84–91.


（上接第 57 页）

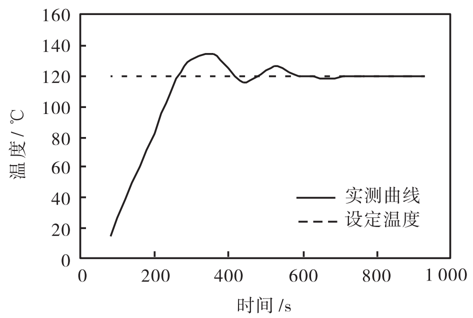


**图 6　实测结果**

**Fig.6　Actual test results**

通过多次实际测量，在 10~150 ℃范围内，控温精度小于 0.3 ℃、与理想 PID 响应曲线接近、有适当的超调、响应快，并且静差消除时间短.

## 4　结　语

本文利用模糊控制原理实现 PID 控制参数自整定，设计了流化床温控系统，实验效果理想，控制精度满足需要. 采用虚拟仪器技术开发了上位机系统，上位机操作界面方便进行人机互动，弥补了常规仪器仪表不能保存数据、不容易扩展功能和更新部件等缺陷，整套系统具有较强的通用性和适应性.

**参考文献：**


［1］ 张浚奎. 循环流化床锅炉的控制现状［J］. 山西电力，2004，6(1)：11–12.

［2］ 张燕秦，徐向东. 循环流化床控制系统设计研究［J］. 电站系统工程，2003，19(5)：50–52.

［3］ 屠乃威，付华，阎馨. 参数自适应模糊 PID 控制器在温度控制系统中的应用［J］. 微计算机信息，2004，20(6)：48–50.

［4］ 蔡春桥，王永军，王俊彪，等. 电阻炉温度控制系统的设计与实现［J］. 科学技术与工程，2007，7(10)：2379–2382.

［5］ Wang Q G，Zou B，Lee T H，et al. Auto-tuning of multivariable PID controllers from decentralized relay feedback［J］. Automatica，1997，34(10)：18–20.

［6］ Zgorzelski P，Unbehauen H，Niederlinski A. New simple decentralized adaptive multivariable regulator and its application to multivariable plants［C］//Proceedings of the 11th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control，Elmsford NY：Pergamon Press Inc，1991：381–386.

［7］ 朱延钊. AD7705/AD7706 的原理与应用［J］. 国外电子器件，2002(6)：59–62.

［8］ 李虹飞，牛鑫. MAX485 在智能高压综合保护装置网络通信中的应用［J］. 内蒙古科技与经济，2006，2(5)：20–24.

［9］ 王建新，杨世凤. LabWindows/CVI 测试技术及工程应用［M］. 北京：化学工业出版社，2006：20–30.