



投入报酬递减规律模拟的回归函数模型与参数估计方法

王玉杰, 张大克

(天津科技大学理学院, 天津 300457)

摘要: 投入报酬递减规律是产品生产中投入与产出的核心规律. 若要获得最优生产决策, 对该规律的模拟是至关重要的. 根据长期从事该方向研究的积累, 给出了一些可用于对投入报酬递减规律进行模拟的回归函数模型, 并提供了相应的参数估计方法, 以解决对投入报酬递减规律进行模拟时回归函数模型确定的困难. 应用实例分析表明, 所给回归函数模型适合对投入报酬递减规律的模拟.

关键词: 投入报酬递减规律; 模拟; 回归分析; 回归函数模型; 参数估计

中图分类号: O212.1 文献标志码: A 文章编号: 1672-6510(2009)02-0070-04

Regression Function Models and Parameter Estimation Methods for the Use of Simulating Investment Diminishing Returns Law

WANG Yu-jie, ZHANG Da-ke

(College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China)

Abstract: The investment diminishing returns law is the core law of investment and return in the product production. If obtains the most superior production decision-making, simulation of the investment diminishing returns law is very important. According to the accumulation to be engaged in this direction research for a long time, we gave some regression function models for the use of simulating investment diminishing returns law, provided the corresponding parameter estimation methods, and solved the difficulty to determine the regression function models for the use of simulating investment diminishing returns law. Application example showed the regression function models suit to simulating investment diminishing returns law.

Keywords: investment diminishing returns law; simulation; regression analysis; regression function model; parameter estimation

投入报酬递减规律是产品生产中投入与产出的核心规律, 是事物的本质^[1]. 而在产品生产中要实现以最低的投入获得最大的产出, 就必须对其投入报酬递减规律进行模拟, 建立以投入量为自变量、以产出量为因变量的回归方程, 然后以所建回归方程为目标函数, 在必要的资源约束条件下通过最优化的方法获得最优的生产决策. 而在获得最优生产决策的过程中, 投入报酬递减规律的模拟是关键, 它的优劣直接关系到生产决策的可靠性. 但由于在不同的产品生产中, 其投入报酬递减规律各不相同, 千变万化, 而在

运用回归分析的方法对投入报酬递减规律进行模拟时回归函数模型又需要研究者自己给出和确定^[2-3], 这就给投入报酬递减规律的模拟带来了困难. 本文旨在解决此问题.

1 回归函数模型与参数估计

虽然在不同的产品生产中, 其投入报酬递减规律各不相同, 千变万化, 但它们都具有以下共同性质.

设 x 为投入量, y 为产出量, 则对投入报酬递减

收稿日期: 2008-05-12; 修回日期: 2008-09-17

基金项目: 天津科技大学引进人才科研启动基金资助项目(20030402)

作者简介: 王玉杰(1962—), 女, 吉林镇赓人, 教授.

规律进行模拟的回归函数模型的一般形式为

$$E(y|x) = f(x) \tag{1}$$

性质 回归函数模型(1)中的函数 $f(x)$ 满足

(1) $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的某个子区间 $[a, b]$ 上有定义, 且连续, 并对任意 $x \in [a, b]$, 有 $f(x) \geq 0$.

(2) $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在唯一的极大值点 x_0 , 且当 $x \in [a, x_0)$ 时, $f'(x) \geq 0$, 当 $x \in (x_0, b]$ 时, $f'(x) \leq 0$.

采用不完全相同的投入量 x_1, x_2, \dots, x_n 进行 n 次独立观测试验, 相应的观测值记为 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$). 依据上述性质和观测数据的散点图可选取下列函数之一作为对投入报酬递减规律进行模拟的回归函数模型^[4-7].

模型 1:

$$E(y|x) = ax^2 + bx + c$$

其中: a, b, c 为未知参数, $a < 0$, 且 $x \geq 0$. a, b, c 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n (y_i - az_i - bx_i - c)^2$$

的最优解, 其中: $z_i = x_i^2, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 2:

$$E(y|x) = ae^{-b(x-c)^2}$$

其中: a, b, c 为未知参数, $a > 0, b > 0, c > 0$, 且 $x \geq 0$. a, b, c 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n (z_i + b\eta_i - dx_i + l)^2$$

的最优解, 其中: $z_i = \ln y_i, \eta_i = x_i^2, d = 2bc, l = bc^2 - \ln a, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 3:

$$E(y|x) = \frac{a}{(1+b(x-c)^2)^d}$$

其中: a, b, c, d 为未知参数, $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, 且 $x \geq 0$. a, b, c, d 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n [z_i + d \ln(b\eta_i - tx_i + l) - s]^2$$

的最优解, 其中: $z_i = \ln y_i, \eta_i = x_i^2, t = 2bc, l = bc^2 + 1, s = \ln a, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 4:

$$E(y|x) = \frac{ae^{-x}}{(b+ce^{-x})^d}$$

其中: a, b, c, d 为未知参数, $a > 0, b > 0, c > 0, d \geq 1$, 且 $x \geq 0$. a, b, c, d 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n [z_i + x_i + d \ln(b + c\eta_i) - l]^2$$

的最优解, 其中: $z_i = \ln y_i, \eta_i = e^{-x_i}, l = \ln a, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 5^[8]:

$$E(y|x) = a + bx + ce^{dx}$$

其中: a, b, c, d 为未知参数, $b < 0, c < 0, d < 0$ 或 $b > 0, c < 0, d > 0$, 且 $x \geq 0$. a, b, c, d 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n [y_i - a - bx_i - ce^{dx_i}]^2$$

的最优解.

模型 6:

$$E(y|x) = ax^b e^{-cx}$$

其中: a, b, c 为未知参数, $a > 0, b > 0, c > 0$, 且 $x \geq 0$. a, b, c 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n (z_i - d - b\eta_i + cx_i)^2$$

的最优解, 其中: $z_i = \ln y_i, \eta_i = \ln x_i, d = \ln a, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 7:

$$E(y|x) = \frac{ax^b}{(1+cx)^d}$$

其中: a, b, c, d 为未知参数, $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, 且 $x > 0$. a, b, c, d 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n [z_i - l - b\eta_i + d \ln(1+cx_i)]^2$$

的最优解, 其中: $z_i = \ln y_i, \eta_i = \ln x_i, l = \ln a, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 8:

$$E(y|x) = ax^{-1} e^{-b(\log x - c)^2}$$

其中: a, b, c 为未知参数, $a > 0, b > 0, c > 0$, 且 $x > 0$. a, b, c 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n (z_i + l + b\xi_i + d\eta_i)^2$$

的最优解, 其中: $z_i = \ln y_i, \xi_i = (\log x_i)^2, \eta_i = \log x_i, l = bc^2 - \ln a, d = 1 - 2bc, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 9:

$$E(y|x) = a(x-d)^b e^{-c(x-d)^{b+1}}$$

其中: a, b, c, d 为未知参数, $a > 0, b > 0, c > 0, d \geq 0$, 且 $x > d$. a, b, c, d 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n [z_i - l - b \ln(x_i - d) + c(x_i - d)^{b+1}]^2$$

的最优解, 其中: $z_i = \ln y_i, l = \ln a, i = 1, 2, \dots, n$.

模型 10:

$$E(y|x) = ax^b (1-x)^c$$

其中： a 、 b 、 c 为未知参数， $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，且 $0 < x < 1$ 。 a 、 b 、 c 、 d 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n (z_i - d - b\xi_i - c\eta_i)^2$$

的最优解，其中： $z_i = \ln y_i$ ， $\xi_i = \ln x_i$ ， $\eta_i = \ln(1 - x_i)$ ， $d = \ln a$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

模型 11:

$$E(y|x) = ae^{-b|x-c|}$$

其中： a 、 b 、 c 为未知参数， $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，且 $x \geq 0$ 。 a 、 b 、 c 的估计值应为优化模型

$$\min \sum_{i=1}^n (z_i - d + b\sqrt{(x_i - c)^2})^2$$

的最优解，其中： $z_i = \ln y_i$ ， $d = \ln a$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

不同模型的典型曲线如图 1 所示。

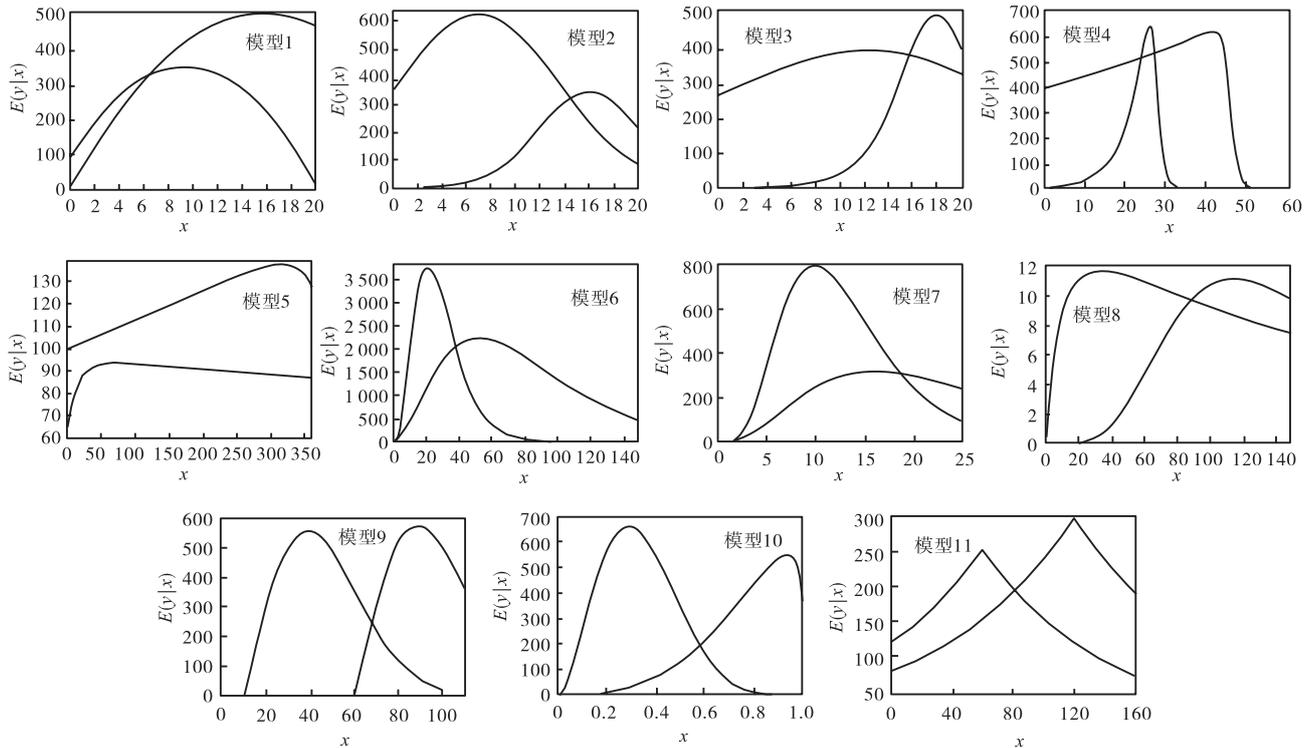


图 1 不同模型的典型曲线图
Fig.1 Typical curves of different models

2 应用实例

应用本文中的回归函数模型及参数估计方法对大白菜的氮肥效应规律进行模拟。观测数据来源于英国农业发展咨询服务中心 (ADAS) 在英格兰进行的田间试验。试验的土壤条件见表 1，氮肥用量和大白菜的市场产量见表 2。

表 1 试验的土壤条件

Tab.1 Soil condition of test

有机质 含量/%	土壤有效氮/(kg·hm ⁻²)			田间持 水量/%
	0 ~ 30 cm	30 ~ 60 cm	60 ~ 90 cm	
2.43	32	42	34	37.5

表 2 氮肥用量和市场产量

Tab.2 Nitrogenous fertilizer amount used and market output

氮肥用量/ (kg·hm ⁻²)	0	60	120	180	240	300	360
市场产量/ (t·hm ⁻²)	100.5	110.1	116.1	126.2	128.9	136.1	128.6

表 2 中观测数据的散点图见图 2。根据散点图的变化趋势，选用模型 5，利用 Matlab 软件对大白菜的氮肥效应规律进行模拟，得经验回归方程

$$\hat{y} = 101.880600 + 0.120338x - 8.691555 \times 10^{-6} e^{0.040182x} \quad (2)$$

式中： x 为氮肥用量 (kg/hm²)； \hat{y} 是 $E(y|x)$ 的估计值； y 为大白菜的市场产量 (t/hm²)。对于试验中 7 个不同氮肥用量，经验回归方程 (2) 的预报值 \hat{y}_i 与观测值

$y_i (i=1,2,\dots,7)$ 的平均相对偏差

$$\frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 \frac{|\hat{y}_i - y_i|}{y_i} = 0.008\ 927 \quad (3)$$

经验回归方程(2)的曲线图见图2.

由式(3)和图2可见,经验回归方程(2)的拟合效果很好,能反映不同氮肥用量对大白菜市场产量影响的变化规律.

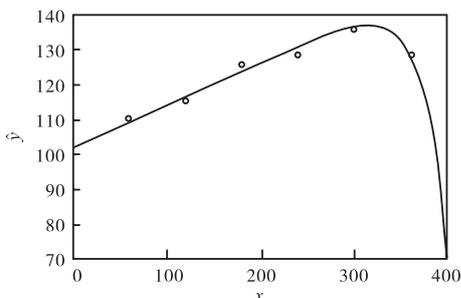


图2 方程(2)的曲线图与观测数据的散点图

Fig.2 Curves figure of equation (2) and scatter figure of observation data

参考文献:

- [1] 董秀茹,刘强,王秋兵. 对“土地报酬递减规律”的再思考[J]. 北方经济:综合版,2006(5):58-59.
- [2] 陈希孺,王松桂. 近代回归分析[M]. 合肥:安徽教育出版社,1987:1-63.
- [3] Douglas M B,Donald G W. 非线性回归分析及其应用[M]. 韦博成,万方焕,朱宏图,译. 北京:中国统计出版社,1997:36-71.
- [4] 张霞峰,朱仲义. 单指标回归模型的若干检验问题[J]. 高校应用数学学报:A辑,2007,22(4):416-426.
- [5] 刘罗曼,张雪岩. 曲线估计方法应用[J]. 沈阳师范大学学报:自然科学版,2007,25(2):161-162.
- [6] 张军亮,刘新平. 广义S形曲线及其非线性回归分析[J]. 纺织高校基础科学学报,2003,16(2):130-133.
- [7] Smith T W. Nonlinear Regression Analysis[M]. New York:John Wiley,1985:36-158.
- [8] 张大克,王玉杰. 伪抛物线回归函数模型的建立与参数估计[J]. 应用数学与计算数学学报,2006,20(2):11-18.

(上接第66页)

表4 版本发布计划

Tab.4 Plans to public version

版本	实现时间	实现内容
版本1	第1—4周	用户登录、修改密码、公告发布与查询、在线答疑、在线考试……
版本2	第5—7周	答疑与考试时间管理、答疑论坛分级管理、考试成绩管理……
版本3	每8—10周	用户信息管理、课件上传下载、在线作业管理、成绩复查、数据库备份与恢复……

客户代表确定系统的核心内容,即各初始用户故事,根据程序员对这些故事的估算,确定第一个发布计划的时间是4周.其他版本的发布时间亦根据此方法安排.

在对系统不断地测试和用户的及时反馈中,实现了所有用户故事.其他子模块亦按照同样的方法逐步实现.整个在线系统经过10周的迭代开发,到最后第3个版本发布时,已稳定地在校园网上运行多时,最终客户和开发人员都比较满意.

4 结 论

通过以上分析和在线教学系统项目的开发实践

可以看出,敏捷软件模式适于中小型软件开发,敏捷软件开发方法同CMMI等重量级方法相比,除追求高效率、高质量以外,更加强调人的管理、团队协作,以及降低成本,适应变化和高度的灵活性.

参考文献:

- [1] Alistair Cockburn. Agile Software Development [M]. Boston:Addison Wesley,2002.
- [2] Highsmith J,Coekburn A. Agile software development: the business of innovation [J]. Computer,2001,34(9):120-121.
- [3] 张为. 现代软件开发生的过程管理方法研究[J]. 计算机工程与科学,2003,25(4):99-103.
- [4] 莫映. 敏捷方法与经典软工的较量[J]. 软件世界,2007(4):64-65.
- [5] Robert C Martin. 敏捷软件开发原则、模式与实践[M]. 邓辉,译. 北京:清华大学出版社,2003:3-8.
- [6] 台安,王世恭. 软件开发成本估算的研究与应用[J]. 科学技术与工程,2007,16(7):4190-4193.
- [7] 李航. 敏捷型软件开发方法与极限编程概述[J]. 计算机工程与设计,2003,24(10):116-121.