第 24 卷 第 1 期
2009 年 2 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.24 No. 1
Feb. 2009

关于非中心χ^2分布性质的研究

张绍璞
(天津科技大学理学院,天津 300457)

摘 要:χ^2 分布是多元分析中重要的分布之一,在参数估计、假设检验、回归分析和判别分析等领域中有广泛的应用. 旨在证明非中心χ^2 分布的几个重要性质和结论,重点讨论经线性变换后的 n 维正态随机向量的二次型所构成的分布,给出其非中心参数的具体计算公式.简化变换后非中心χ^2分布的计算,并说明了这些结论在多元分析中的作用.

关键词:多元分析;协方差矩阵;非中心χ^2 分布;参数;逆矩阵

中图分类号:O212.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6510(2009)01-0075-04

Research about the Properties of Noncentral χ^2 Distribution

ZHANG Shao-pu
(College of Science,Tianjin University of Science & Technology,Tianjin 300457,China)

Abstract: χ^2 distribution is one of the important distribution in multivariate statistical analysis,which is supplied widely in the parameters estimation, hypothesis test, regression analysis, discriminant function analysis field. This paper reveals some important nature and conclusion about noncentral χ^2 distribution and proves those, discusses the distribution that is constituted by quadratic forms of n-dimensional normal vector which is changed by linear transformation. It is given the specific count formula of noncentral parameter, and simplified the count of noncentral χ^2distribution after trans-formation. And it is explained that those conclusion is supplied in multivariate statistical analysis.

Keywords: multivariate statistical analysis; covariance matrix;noncentral χ^2 distribution; parameter;inverse matrix

随着科技的发展,多元分析得到了越来越广泛的应用. 由于χ^2 分布的应用遍及多元分析中的参数估计、假设检验、回归分析和判别分析等多个领域,很多计算都必须利用χ^2 分布来解决,因此χ^2 分布是多元分析中重要工具之一.对于χ^2 分布的理论与应用的讨论与研究,在当前的多元分析理论研究中非常重要,并得到广泛的重视[1-3]. 随机变量经过线性变换后其二次型所服从的χ^2 分布与非中心χ^2 分布的计算非常繁杂,难度较大. 为了简化繁杂的计算,进一步确定其分布的类型,更有利于实际应用,本文讨论了非中心χ^2 分布的有关新的性质,并给出了简化计算的方法,进一步完善了多元统计分析的理论与应用的研究.

1 随机向量及协方差矩阵的性质

一般把 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的整体称为 n 维随机向量,记为 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$, 记 $E(\boldsymbol{X}) = (EX_1, EX_2, \cdots, EX_n)^{\mathrm{T}}$ 为均值向量,均值向量也可简写为 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$,其中 $\mu = E(X)$, $\mu_i = EX_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

记 X 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{V} = D(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{EX})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{EX})^{\mathrm{T}} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Cov}(X_2, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

记 $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, 则上式可简写为 $\boldsymbol{V} = (\sigma_{ij})_{n \times n}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 为常数矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为常数向量,则协方差矩阵有以下性质[4-5]:

收稿日期:2008-04-14;**修回日期**:2008-08-25
作者简介:张绍璞(1954—),男,山东人,副教授.

(1) $D(\boldsymbol{X}) \geqslant 0$,即 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵是非负定矩阵;
(2) $D(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{b}) = D(\boldsymbol{X})$;
(3) $D(\boldsymbol{AX}) = \boldsymbol{A}D(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

2 关于非中心 χ^2 分布的定义及性质

定义[6] 设随机变量 $X_i \sim N_1(\mu_i, 1)$ $(i=1,\cdots,n)$,且相互独立,当 $\mu_i \neq 0$ 时,记

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I}_n)$,称随机变量 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 为自由度为 n,非中心参数 $\delta = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2$ 的非中心 χ^2 分布,记 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n,\delta)$.

性质[6] 当 $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)$,$\mu \neq 0$,且 $\sigma^2 \neq 1$ 时,令 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ Y_2, \ \cdots \ Y_n)^{\mathrm{T}}$,其中 $Y_i = \dfrac{1}{\sigma}X_i$,显然 $Y_i \sim N\left(\dfrac{\mu_i}{\sigma}, 1\right)$ $(i=1,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \dfrac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n,\delta)$,其中非中心参数 $\delta = \dfrac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$.

3 关于非中心 χ^2 分布的研究及结论

在生产领域、科研领域、经济学领域和日常生活中经常需要根据观测到的数据资料,以 χ^2 分布为工具,对所研究的对象进行估计、检验、判别分析或定性.另外一些很复杂的问题需用非中心 χ^2 分布解决,可以参考有关文献[7–8].

在实际应用中,根据需要有时需对 n 维正态随机向量进行线性变换. 对于线性变换后的 n 维正态随机向量二次型的分布,往往需要确定其分布的类型与特性,计算其具体参数,研究其实际的应用. 这些都是很重要的问题,下面针对这些问题给予讨论和分析,并通过证明给出非中心 χ^2 分布的有关新的性质和结论,最后给出解决上述问题和简化计算的新方法.

结论 1 设 n 维正态随机向量 $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$,其中 $\boldsymbol{V}>0$,$\boldsymbol{b}$ 为常数向量,则随机变量(可视为随机向量的二次型) $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{b}) \sim \chi^2(n,\delta)$,其中非中心参数 $\delta = (\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{b})$.

证明:因 n 维正态随机向量 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{b} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{V})$,又因 $\boldsymbol{V}>0$,由正定矩阵的分解可得 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{CC}^{\mathrm{T}}$($\boldsymbol{C}$ 为可逆方阵),令 $Y = C^{-1}(X+b)$,即 $X+b = CY$,由

$$EY = C^{-1}E(X+b) = C^{-1}(\mu+b)$$

$$DY = D\left[C^{-1}(X+b)\right] = C^{-1}D(X+b)\left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = C^{-1}V\left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = C^{-1}CC^{\mathrm{T}}\left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = I$$

得 $Y \sim N_n\left(C^{-1}(\mu+b), I_n\right)$

又因

$$C^{\mathrm{T}}V^{-1}C = C^{\mathrm{T}}\left(CC^{\mathrm{T}}\right)^{-1}C = C^{\mathrm{T}}\left(C^{\mathrm{T}}\right)^{-1}C^{-1}C = I$$

则有

$$(X+b)^{\mathrm{T}}V^{-1}(X+b) = (CY)^{\mathrm{T}}V^{-1}(CY) = Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}V^{-1}CY = Y^{\mathrm{T}}Y \sim \chi^2(n,\delta)$$

根据定义得

$$\delta = \left[C^{-1}(\mu+b)\right]^{\mathrm{T}}C^{-1}(\mu+b) = (\mu+b)^{\mathrm{T}}\left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}}C^{-1}(\mu+b) = (\mu+b)^{\mathrm{T}}V^{-1}(\mu+b)$$

特别在结论 1 中,取 $b=-\mu$,$X+b = X-\mu$,得

$$\delta = (\mu+b)^{\mathrm{T}}V^{-1}(\mu+b) = 0$$

可得 $(X-\mu)^{\mathrm{T}}V^{-1}(X-\mu) \sim \chi^2(n)$

结论 2 设 n 维正态随机向量 $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$,其中 $\boldsymbol{V}>0$,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵,$\boldsymbol{b}$ 为常数向量,则随机变量(可视为经线性变换后的随机向量的二次型) $(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}) \sim \chi^2(n,\delta)$,其中非中心参数 $\delta = (\boldsymbol{A\mu}+b)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\boldsymbol{A\mu}+\boldsymbol{b})$.

证明: 因 $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$,所以 $E(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{AEX}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A\mu}+\boldsymbol{b}$,$D(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}) = D(\boldsymbol{AX}) = \boldsymbol{ADXA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}$,故随机向量 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b} \sim N_n\left(\boldsymbol{A\mu}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{AVA}^{\mathrm{T}}\right)$,又因 $\boldsymbol{V}>0$,由正定矩阵的分解可得 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{CC}^{\mathrm{T}}$($\boldsymbol{C}$ 为可逆方阵),故

$$AVA^{\mathrm{T}} = ACC^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = AC(AC)^{\mathrm{T}}$$

由 A 与 C 可逆,知 AC 可逆,令

$$Y = (AC)^{-1}(AX+b),\text{即} \quad AX+b = (AC)Y$$

由

$$EY = E(AC)^{-1}(AX+b) = (AC)^{-1}(A\mu+b)$$

$$DY = D\left[(AC)^{-1}(AX+b)\right] = (AC)^{-1}D(AX+b)\left((AC)^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = (AC)^{-1}AC(AC)^{\mathrm{T}}\left((AC)^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = I$$

证得

$$Y = (AC)^{-1}(AX+b) \sim N_n\left((AC)^{-1}(A\mu+b), I_n\right)$$

则有

$$\begin{aligned}&(AX+b)^{\mathrm{T}}(AVA^{\mathrm{T}})^{-1}(AX+b)=\\&(AX+b)^{\mathrm{T}}\left(AC(AC)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(AX+b)=\\&(AX+b)^{\mathrm{T}}\left[(AC)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(AC)^{-1}(AX+b)=\\&\left[(AC)^{-1}(AX+b)\right]^{\mathrm{T}}(AC)^{-1}(AX+b)=\\&Y^{\mathrm{T}}Y\sim\chi^2(n,\delta)\end{aligned}$$

根据定义得

$$\begin{aligned}\delta&=\left[(AC)^{-1}(A\mu+b)\right]^{\mathrm{T}}(AC)^{-1}(A\mu+b)=\\&(A\mu+b)^{\mathrm{T}}\left((AC)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(AC)^{-1}(A\mu+b)=\\&(A\mu+b)^{\mathrm{T}}\left[(AC)(AC)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}(A\mu+b)=\\&(A\mu+b)^{\mathrm{T}}(AVA^{\mathrm{T}})^{-1}(A\mu+b)\end{aligned}$$

通过比较可看出,结论 1 是结论 2 中取 A 为单位矩阵时的特例.

4　n 维正态随机向量线性变换后二次型的分布及应用

在多元分析中,有时需对正态随机向量 X 进行随机向量线性变换 $Y=AX+b$,其中 A 为可逆方阵, b 为常数向量. 则随机向量 Y 是 X 的随机向量线性函数. 对于线性变换后 n 维正态随机向量二次型的分布,其分布类型的确定和参数的计算,这些都是很复杂而难以解决的问题,而前面所给出的结论 1 和结论 2 正是解决这些问题的有力工具.

下面根据实际问题讨论关于随机向量经过线性变换后,其二次型的分布与计算.

问题　已知三维正态随机向量 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}\sim N(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{V})$,其中 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&4\end{pmatrix}$,设随机向量函数 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4X_1+X_3+1\\2X_2+X_3-4\\X_1+3X_3+3\end{pmatrix}$

(1)求 $\boldsymbol{Y}$ 的服从非中心 χ^2 分布的二次型;

(2)求 $\boldsymbol{Y}$ 的二次型所服从的非中心 χ^2 分布的非中心参数 δ .

解:(1)因为 $Y=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$, 设

$$A=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&2&1\\1&0&3\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$$

则有线性变换 $Y=AX+b$.根据前面所证明的结论 2 知有二次型 $(AX+b)^{\mathrm{T}}(AVA^{\mathrm{T}})^{-1}(AX+b)$ 服从非中心 $\chi^2(3,\ \delta)$ 分布.

由于

$$AVA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&1\\0&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&18&29\\18&16&21\\29&21&43\end{pmatrix}$$

通过计算,得

$$(AVA^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{pmatrix}28&18&29\\18&16&21\\29&21&43\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{247}{1\,452}&\frac{-5}{44}&\frac{-43}{726}\\\frac{-5}{44}&\frac{1}{4}&\frac{-1}{22}\\\frac{-43}{726}&\frac{-1}{22}&\frac{31}{363}\end{pmatrix}$$

所以有 Y 的二次型

$$\begin{pmatrix}4X_1+X_3+1\\2X_2+X_3-4\\X_1+3X_3+3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\frac{247}{1\,452}&\frac{-5}{44}&\frac{-43}{726}\\\frac{-5}{44}&\frac{1}{4}&\frac{-1}{22}\\\frac{-43}{726}&\frac{-1}{22}&\frac{31}{363}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4X_1+X_3+1\\2X_2+X_3-4\\X_1+3X_3+3\end{pmatrix}\sim\chi^2(3,\ \delta)$$

(2)因为 $A\mu+b=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\8\end{pmatrix}$

根据前面所证明的结论 2 知,上式 Y 的二次型服从非中心 $\chi^2(3,\ \delta)$ 分布的非中心参数计算公式为

$$\delta=(A\mu+b)^{\mathrm{T}}(AVA^{\mathrm{T}})^{-1}(A\mu+b)=6\frac{847}{1\,452}$$

5　结　语

通过此问题的计算和讨论可知,利用结论 1 和结论 2 可以解决对于线性变换后的 n 维正态随机向量二次型的分布,及其分布的类型的确定这一难题. 并

且可以大幅度简化有关参数的复杂计算. 在实际应用中起到很重要的作用.

多元分析应用非常广泛[9-10],其中有许多问题涉及到非中心 χ^2 分布的计算. 本文讨论了线性变换后 n 维正态随机向量二次型的分布,及其分布的类型的确定和参数的计算.经过对其性质的有关研究和证明,给出了如何确定线性变换后 n 维正态随机向量二次型的分布类型和简化计算相对应非中心 χ^2 分布的非中心参数的有关方法. 其结果更有利于实际应用.

参考文献:

［1］ 侯紫燕,廖靖宇. 重复测量试验模型参数似然比检验及其功效分析[J]. 应用概率统计,2007,23(1):68–76.
［2］ 宋福铁,陈浪南. 卡尔曼滤波法模拟和预测沪市国债期限结构[J]. 管理科学,2006,19(6):81–88.
［3］ 李绍明,滕成业. 四元数非中心 χ^2 分布,t 分布,F 分布及性质[J]. 数学研究,2001,34(2):170–175.
［4］ 王学民. 应用多元分析[M]. 上海:上海财经大学出版社,2004:43–45.
［5］ 于秀林. 多元统计分析[M]. 北京:中国统计出版社,1999:13–15.
［6］ 高惠璇. 应用多元统计分析[M]. 北京:北京大学出版社,2005:51–53.
［7］ 苏文希. 广义非中心多元 wishart 分布[J]. 汕头大学学报,2004,19(3):9–18.
［8］ 赵国龙. 广义非中心法[J]. 应用概率统计,1999,15(4):337–344.
［9］ 张润楚. 多元统计分析[M]. 北京:科学出版社,2006:63–111.
［10］何晓群.多元统计分析[M]. 北京:中国人民大学出版社,2004:86–12.

(上接第 46 页)

从表 3 看出,杨木 APMP 制浆废液中的有机污染物共检出 21 种物质. 其中脂肪酸类物质占 57.13%,绝大部分为饱和脂肪酸,为 52.15%,但是均是一些小分子脂肪酸. 同时,实验还检测到一种树脂酸——脱氢枞酸,但是其含量很少. 说明杨木 APMP 制浆废液中主要是脂肪酸类物质含有很少量的树脂酸. 这些物质,大多不会直接影响废液色度,对于 COD_{Cr} 指标贡献亦不大,但其生物毒性对于生化处理效果的影响应当予以充分的关注. 同时还检测到文献中报道的邻苯二甲酸酯类,主要为邻苯二甲酸二丁酯,其也是废液毒性的来源之一. 此外,还检测到取代的苯基酸类含量为 6.904%,酚类物质为 3.754%,但是这些物质含量均较少.

3 结 论

(1) 杨木 APMP 制浆废液中的发色污染物质主要是相对分子质量大于30 000 的大分子物质,采用超滤可以有效地去除废液的大部分色度,而对 COD 去除不显著. 废液中高相对分子质量组分的理化特性以及生化降解性有待进一步研究.

(2) 杨木 APMP 制浆废液中的有机污染物质主要是一些小分子的饱和脂肪酸,约占检测物质的 52.15%,而树脂酸含量很少. 这些物质虽然对废水 COD 和色度的影响不是很大,但是其生物毒性对于生化处理效果的影响应当予以充分的关注.

参考文献:

［1］ 苗庆显,秦梦华,候庆喜,等. 高得率制浆废水处理技术的探讨[J]. 中国造纸,2008,27(1):46–49.
［2］ 刘光良,杨殿隆,王静霞. Ⅱ. 废水污染特征及毒性[J]. 林产化学与工业,1995,15(增刊):111–117.
［3］ 刘光良,杨殿隆,王静霞. 化学机械浆废水污染特征及毒性的研究[C]//中国造纸学会第八届学术年会论文集. 北京:中国造纸学会,1997:229–234.
［4］ Munch J W, Eichelberger J W. Evaluation of 48 compounds for possible inclusion in U. S. EPA method 524. 2, revision 3. 0: expansion of the method analyte list to a total of 83 compounds [J]. Journal of chromatographic science, 1992, 30(12): 471–477.
［5］ 高扬,闫冰,张曾,等. 化学机械法制浆废液中污染物质的白腐菌降解 第 3 部分 白腐菌生化降解前后废液的气相色谱/质谱分析 [J]. 中国造纸学报,2002,17(1):44–47.
［6］ 李海明. 桉木 CTMP 制浆废水显色特征及其脱色研究[D]. 广东:华南理工大学,2007.
［7］ 李海明,何北海,陈元彩,等. 制浆造纸工业废水色度的检测方法及其应用研究[J]. 中国造纸,2006,25(7):23–27.