第25卷 第5期
2010年10月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.25 No. 5
Oct. 2010

图的星色数的两个结果

安明强
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘 要：图 G 的星染色是图 G 的正常点染色,使得图 G 中没有长为 3 的路 2–染色. 通过应用概率方法中的非对称局部引理,证明了任一最大度为 Δ 的图的星色数 $\chi_s(G)\leqslant 48\Delta^3$. 通过应用第一矩量原理和 Markov 不等式,证明了对任一有 n 个顶点的最大度为 Δ 的图 G,其星色数 $\chi_s(G)\leqslant n\Delta$.

关键词：点染色；正常染色；星染色；星色数；概率方法

中图分类号：O157.5 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6510(2010)05-0076-03

Two Results of the Star Chromatic Number of Graphs

AN Ming-qiang
(College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China)

Abstract: A star coloring of a graph G is a proper coloring of G such that no path of length 3 in G is bicolored. It was proved that every graph with maximum degree Δ has a star coloring with at most $48\Delta^3$ colors by using the Asymmetric Local Lemma of probabilistic method. And It was also proved that every graph with n vertices and with maximum degree Δ has a star coloring with at most $n\Delta$ colors by using the First Moment Principle and Markov's Inequality.

Keywords: vertex coloring; proper coloring; star coloring; star chromatic number; probabilistic method

1973 年,Grünbaum[1]首先提出了星染色的概念,图 G 的星染色是 G 的一个正常顶点染色满足图中无长为 3 的路是 2–染色的. 使得 G 有星染色的最小颜色数称为 G 的星色数,记作 $\chi_s(G)$. 2004 年,Fertin 等在文献[2]中得出树、圈、完全二部图、外平面图等特殊图的确切的星色数. 2006 年,刘信生等[3]提出了星边染色的概念,若图的一个正常边染色满足图中没有长为 4 的路是 2–边染色的,则称此染色是图的一个星边染色,使得该图有星边染色的最小颜色数称为星边色数,记作 $\chi_s'(G)$. 文献[4–5]利用概率方法研究了邻点可区别的边染色和邻点可区别的无圈边染色,分别得到了其色数的上界 $\chi_{avd}'(G)\leqslant 300$, $\chi_{aa}'(G)\leqslant 32\Delta$. 这些方法对于本文的研究给予了一定的启发,为本文的工作奠定了基础.

引理 1[6] (非对称的局部引理)考虑事件的集合 $\varepsilon=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,对每一个 A_i,都存在 D_i(D_i 可以空),使得每一个 A_i 与 $\varepsilon-(D_i\cup A_i)$ 互相独立(对某个 $D_i\subseteq\varepsilon$),如果对每个 $1\leqslant i\leqslant n$,

(1) $Pr(A_i)\leqslant\dfrac{1}{4}$

(2) $\sum\limits_{A_j\in D_i}Pr(A_i)\leqslant\dfrac{1}{4}$

则 ε 中所有事件都不发生的概率是正的.

引理 2[6] (第一矩量原理)如果 $E(X)\leqslant t$,则 $Pr(X\leqslant t)>0$.

引理 2 多用于 X 是正整数值且 $E(X)<1$,则有 $Pr(X=0)>0$.

由概率论知识可知

事实 1 $1-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}Pr(\bar{A}_i)\right)\leqslant Pr\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)$.

Markov 不等式[6] 对任意的正随机变量 X,有 $Pr(X\geqslant t)\leqslant\dfrac{E(X)}{t}$.

收稿日期：2010–03–01；**修回日期**：2010–05–18
基金项目：天津科技大学科学研究基金资助项目（20090222）
作者简介：安明强（1982—），男，甘肃天水人，讲师，anmq@tust.edu.cn.

Markov 不等式多用于 X 是正整数值且 $E(X)<1$，则有 $Pr(X\geqslant 1)\leqslant\dfrac{E(X)}{1}=E(X)$，即 $Pr(X>0)\leqslant E(X)$.

本文通过运用概率方法中的非对称局部引理，以及第一矩量原理和 Markov 不等式，分别得到星色数的两个上界，其中后者得到的上界较小. 文中未加述及的术语和符号可参见文献[6–7].

定理 1　对任一最大度为 Δ 的图 G，有 $\chi_s(G)\leqslant 48\Delta^3$.

证明　为了证明的方便，令 $\Delta=d$，令 $l=48d^3$，令 $C:V(G)\to\{1,2,\cdots,l\}$ 表示 G 的随机正常（点）染色，为了保证星染色，需满足下面两个条件：

(1) 正常点染色，

(2) 每一条长为 3 的路上的点不是二色的.

为此，定义如下坏事件：

（Ⅰ）对每一对相邻的点 $u,v\in V(G)$，令 $A_{u,v}$ 表示 u 和 v 被染成同种颜色的事件.

（Ⅱ）对每条长为 3 的路 $uvwx$，令 $B_{u,v,w,x}$ 是 $C(u)=C(w)$，且 $C(v)=C(x)$ 的事件.

注意到如果（Ⅰ）与（Ⅱ）都不发生，则 C 是 G 的星染色.下面证明这两类事件不发生的概率严格为正.

为了运用引理 1，需进行以下几个步骤：

(1) 计算坏事件发生的概率：

$$Pr(A_{u,v})=\frac{1}{l}，\ Pr(B_{u,v,w,x})=\frac{1}{l^2}<\frac{1}{l}.$$

(2) 计算相关事件数.

构造相关图 H，H 中的结点就是两种类型的所有事件，其中两个结点 X_{S_1} 和 Y_{S_2}（$X,Y\in\{A,B\}$）相邻，当且仅当 $S_1\cap S_2\neq\varnothing$. 由于每个事件 X_{s_1} 的发生仅依赖于 S_1 中顶点所染的颜色，从而 H 就是这些事件的相关图. 由上述相关图的构造可得表 1.

表 1　相关图 H 的构造

Tab.1　Construction of dependency graph H

	$A_{u,v}$	$B_{u,v,w,x}$
$A_{u,v}$	$2d$	$4d^3$
$B_{u,v,w,x}$	$4d^3$	$8d^3$

(3) 为了证明坏事件不发生的概率为正，只需以下两点成立：

（Ⅰ）$Pr(A_{u,v})=\dfrac{1}{l}\leqslant\dfrac{1}{4}(l\geqslant 4)$且

$$2d\times\frac{1}{l}+4d^3\times\frac{1}{l^2}<\frac{2d}{l}+\frac{4d^3}{l}=\frac{2d+4d^3}{48d^3}<\frac{2d^3+4d^3}{48d^3}=\frac{1}{8}<\frac{1}{4}.$$

（Ⅱ）$Pr(B_{u,v,w,x})=\dfrac{1}{l^2}\leqslant\dfrac{1}{4}(l\geqslant 2)$且

$$4d^3\times\frac{1}{l}+8d^3\times\frac{1}{l^2}<\frac{4d^3}{l}+\frac{8d^3}{l}=\frac{12d^3}{48d^3}=\frac{1}{4}.$$

由（Ⅰ）、（Ⅱ）知，引理 1 适用，因此 C 是图 G 的一个 $48d^3$－星染色. 从而定理 1 成立.

定理 2　对任一有 n 个顶点的最大度为 Δ 的图 G，有 $\chi_s(G)\leqslant n\Delta$.

证明　为了证明的方便，可以令 $\Delta=d$，令 $l=nd$，从颜色集合 $\{1,2,\cdots,l\}$ 中给图 G 的每个顶点随机均匀地分配一种颜色，使得每个这样的选择与所有其他的选择互相独立，为了保证星染色，必须使以下两点成立：

(1) 正常点染色，

(2) 每一条长为 3 的路上的点不是二色的.

为此，定义如下指标变量：

（Ⅰ）对每条边 uv，令

$$X_{u,v}=\begin{cases}1, & \text{如果}u,v\text{颜色一样}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

并令 $X=\sum\limits_{uv\in E(G)}X_{u,v}$，注意到 X 即是不满足正常点染色的相邻点对的数量.

（Ⅱ）对每条长为 3 的路 $uvwx$，令

$$Y_{u,v,w,x}=\begin{cases}1, & \text{如果}u\text{和}v\text{满足}C(u)=C(w)\text{且}C(v)=C(x)\\ 0, & \text{否则}\end{cases},$$

并令 $Y=\sum\limits_{u,v,w,x\in P}Y_{u,v,w,x}$，注意到 Y 即是不满足任一条长为 3 的路非二色的路的数量.

现只要证 $Pr(X=0\text{且}Y=0)>0$，根据事实 1 可得 $Pr(X=0\text{且}Y=0)\geqslant 1-[Pr(X>0)+Pr(Y>0)]>0$(令$A_1=\{X=0\},A_2=\{Y=0\}$，且 $\overline{A}_1=\{X>0\},\ \overline{A}_2=\{Y>0\}$)，即只需证 $Pr(X>0)+Pr(Y>0)<1$ 即可. 根据 Markov 不等式：$Pr(X>0)\leqslant E(X)$，所以只需证 $E(X)+E(Y)<1$ 即可.

首先，计算 $E(X)$.

由于，$E(X_{u,v})=Pr(X_{u,v})=\dfrac{1}{l}$，通过期望的线性性质，有

$$E(X)=\sum_{uv\in E(G)}E(X_{u,v})\leqslant\frac{nd}{2}\cdot\frac{1}{l}=\frac{nd}{2nd}=\frac{1}{2}$$

所以，$E(X)<\dfrac{1}{2}$.

其次，计算 $E(Y)$.

由于 $E(Y_{u,v,w,x})=Pr(Y_{u,v,w,x})=\dfrac{1}{l^2}$，通过期望的线性性质，有

$$E(Y)=\sum_{u,v,w,x\in P}E(Y_{u,v,w,x})\leqslant\frac{n\cdot 2d^3}{4}\cdot\frac{1}{l^2}=$$
$$\frac{nd^3}{2(nd)^2}=\frac{d}{2n}<\frac{1}{2}$$

所以，$E(Y)<\frac{1}{2}$.

故 $E(X)+E(Y)<1$，从而定理 2 成立.

参考文献：

[1] Grünbaum B. Acyclic colorings of planar graphs[J]. Israel Journal of Mathematics，1973，14(4)：390–408.

[2] Fertin G，Raspaud A，Reed B. Star coloring of graphs[J]. Journal of Graph Theory，2004，47(3)：163–182.

[3] Liu X S，Chen X E，Ou L F. A lower bound on cochromatic number for line graphs of a kind of graphs[J]. Applied Mathematics：A Journal of Chinese Universities，2006，21(3)：357–360.

[4] Hatami H. $\Delta+300$ is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number[J]. Journal of Combinatorial Theory：Series B，2005，95(2)：246–256.

[5] Liu X S，An M Q，Gao Y. An upper bound for the adjacent vertex distinguishing acyclic edge chromatic number of a graph[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica：English Series，2009，25(1)：137–140.

[6] Molloy Mi，Reed B. Graph Coloring and the Probabilistic Method[M]. New York：Springer，2002.

[7] Bondy J A，Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. London：Macmillan Press Ltd，1976.

（上接第 67 页）

[3] 刘万春，贾云得，徐一华，等. 基于肤色的人脸实时跟踪方法[J]. 北京理工大学学报，2000，20(4)：461–465.

[4] 温静，高新波. 一种基于肤色模型的贝叶斯人脸检测算法[J]. 西安电子科技大学学报：自然科学版，2006，33(5)：773–777.

[5] 张争珍，石跃祥. YCgCr 颜色空间的肤色聚类人脸检测法[J]. 计算机工程与应用，2009，45(22)：163–165.

[6] 马淑燕，孔德慧，尹宝才，等. 基于肤色模型和椭圆环模板的人脸跟踪及姿态估计[J]. 计算机工程与应用，2004，40(17)：50–55.

[7] 帕普里斯，佩莱. 概率、随机变量与随机过程[M]. 保铮，冯大政，水鹏朗，译. 4 版. 西安：西安交通大学出版社，2004：164–169.

[8] 杨光正，黄煦涛. 镶嵌图在人面定位中的应用[J]. 模式识别与人工智能，1996，9(3)：213–220.