



基于旋量理论的 Stanford 臂的运动学分析

李 君

(天津科技大学理学院, 天津 300457)

摘 要: 基于旋量理论的运动学分析方法比采用传统的 D-H 方法更加简化. 以一种常见的开链机器人 Stanford 臂为例, 利用运动旋量和指数积等数学工具建立了运动学方程, 求出了雅可比矩阵, 为建立其动力学方程、控制方法及运动规划做了必要的准备.

关键词: 旋量理论; 指数积公式; 运动学方程; 雅可比矩阵

中图分类号: TP24

文献标志码: A

文章编号: 1672-6510(2010)04-0072-04

Kinematics Analysis on Stanford Arm Based on Screw Theory

LI Jun

(College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China)

Abstract: The method of kinematics analysis based on screw theory is simpler than the traditional D-H method. Illustrating with Stanford arm, a popular opened chain robot, the kinematics equation and Jacobian matrix of the robot were obtained by the mathematic tools—twist, product of exponentials, etc. The method is beneficial to establishing the dynamic equation, control method and motion planning.

Keywords: screw theory; product of exponentials formula; kinematics equation; Jacobian matrix

建立机器人运动学和动力学的传统方法是采用 D-H 参数方法, 为每个连杆建立局部坐标系, 这样运算比较繁琐. 与它相比, 基于旋量理论的分析方法采用运动螺旋, 充分利用了其几何特性, 只需要建立基础坐标系和工具坐标系, 从而更适合从整体上描述机器人的运动, 使得对机器人机构的分析更加简便、适用. 旋量理论的基本原理由 Chasles 和 Poincaré 于 19 世纪初期提出, Ball 促进了旋量理论的发展, 于 1900 年形成了完整的旋量理论^[1]. Murry 等于 20 世纪末以线性代数和矩阵理论为基础, 给出了一种新的旋量理论处理方法^[2], 其基本思想是以齐次坐标来表示刚体运动, 并通过矩阵的指数映射将运动旋量变换为相应的刚体运动. 近年来, 以李群、李代数为基础的旋量理论在机器人领域, 包括机器人的运动学及动力学、雅可比矩阵以及机器人综合等方面都得到了较广泛的应用^[3-7].

Stanford 臂是一种常见的开链机器人, 它是 1969

年由 Victor Scheinman 设计的, 几十年来, Stanford 机器人因其独特的结构特点被广泛地用于教学和工业生产当中. 本文以 Stanford 臂为例, 基于旋量理论建立机器人的运动学方程, 求出了雅可比矩阵, 为进一步建立其动力学方程、控制方法及运动规划做了必要的准备.

1 旋量理论基础

通常, 刚体运动包括转动和移动两部分. 若设刚体坐标系 B 的原点相对于坐标系 A 的位置矢量为 $p_{AB} \in \mathbf{R}^3$, B 系相对于 A 系的姿态为 $R_{AB} \in SO(3)$ ($SO(3)$ 为三维旋转群), 则系统的位姿由 (p_{AB}, R_{AB}) 确定, 用齐次坐标可表示为

$$g = \begin{bmatrix} R_{AB} & p_{AB} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统的位形空间为一个欧氏群:

收稿日期: 2009-12-23; 修回日期: 2010-03-05

基金项目: 天津科技大学自然科学研究基金资助项目 (20070205)

作者简介: 李 君 (1973—), 男, 黑龙江人, 讲师, lij_73@tust.edu.cn.

$$SE(3) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)\}$$

$$= \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

设 $\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)})^T \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$. 定义运动旋量

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$$

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{(3)} & \omega^{(2)} \\ \omega^{(3)} & 0 & -\omega^{(1)} \\ -\omega^{(2)} & \omega^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \in so(3)$$

其中, $se(3) = \{(v, \hat{\omega}) : v \in \mathbb{R}^3, \hat{\omega} \in so(3)\}$ 与 $so(3) = \{R : R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, R^T = -R\}$ 分别为李群 $SE(3)$ 与 $SO(3)$ 的李代数. $\xi = (v, \omega) \in \mathbb{R}^6$ 称为 $\hat{\xi}$ 的运动旋量坐标. 设 $\theta \in \mathbb{R}$, 则有 $e^{\hat{\xi}\theta} \in SE(3)$; 反之, 对 $g \in SE(3)$, 存在 $\hat{\xi} \in se(3)$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得 $g = e^{\hat{\xi}\theta}$.

设 $g_{AB}(0)$ 和 $g_{AB}(\theta)$ 分别为坐标系 B 相对于坐标系 A 的初始位形和最终位形, 则有 $g_{AB}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{AB}(0)$.

任意刚体运动均可通过绕一轴的转动加上平行于该轴的移动实现. 刚体的一般运动, 可用旋量运动来描述. 旋量运动与旋量是一一对应的. 如图 1 所示, $q \in \mathbb{R}^3$ 为刚体上的一个点, $\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)})^T$ 为一单位矢量, l 为过点 q 沿 ω 方向的有向直线. 所谓旋量, 包括轴 l 、节距 h 及大小 M 三个要素. 与旋量对应的旋量运动则定义为: 当 $-\infty < h < +\infty$ 时, 对应的旋量运动为绕轴 l 旋转大小为 M 弧度的角再沿与 l 平行的方向移动大小为 hM 的距离; 当 $h = \infty$ 时, 对应的旋量运动即为仅沿轴 l 方向移动大小为 M 的距离.

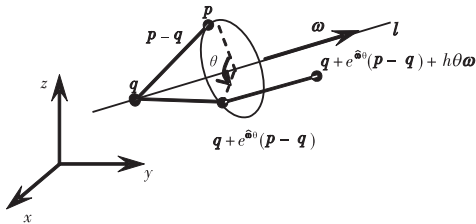


图 1 刚体的旋量运动

Fig.1 Screw motion of rigid body

在刚体的运动中, 设 A 为其空间坐标系, B 为其物体坐标系, 刚体的运动轨迹 $g_{AB}(t) \in SE(3)$, 则刚体的空间速度为

$$\hat{V}_{AB}^s = \dot{g}_{AB} g_{AB}^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{AB} R_{AB}^T & -\dot{R}_{AB} R_{AB}^T p_{AB} + \dot{p}_{AB} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

或

$$V_{AB}^s = \begin{bmatrix} v_{AB}^s \\ \omega_{AB}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{R}_{AB} R_{AB}^T p_{AB} + \dot{p}_{AB} \\ (\dot{R}_{AB} R_{AB}^T)^\vee \end{bmatrix}$$

刚体的物体速度为

$$\hat{V}_{AB}^b = g_{AB}^{-1} \dot{g}_{AB} = \begin{bmatrix} R_{AB}^T \dot{R}_{AB} & R_{AB}^T \dot{p}_{AB} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

或

$$V_{AB}^b = \begin{bmatrix} v_{AB}^b \\ \omega_{AB}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AB}^T \dot{p}_{AB} \\ (R_{AB}^T \dot{R}_{AB})^\vee \end{bmatrix}$$

它们之间的关系为

$$V_{AB}^s = \begin{bmatrix} R_{AB} & \hat{p}_{AB} R_{AB} \\ 0 & R_{AB} \end{bmatrix} V_{AB}^b$$

这里矩阵

$$Ad_g = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

称为关于 g 的伴随变换, 它满足

$$Ad_g^{-1} = Ad_{g^{-1}} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \hat{p} \\ 0 & R^T \end{bmatrix}$$

2 指数积公式与雅可比矩阵

机器人的运动学正解是指在给定组成运动副的相邻连杆的相对位置情况下, 确定机器人末端执行器的位形. 如果定义 $g_{l_{i-1}l_i}(\theta_i)$ 为相邻连杆坐标系间的变换, 那么总的运动方程为

$$g_{ST}(\theta) = g_{S l_1}(\theta_1) g_{l_1 l_2}(\theta_2) \cdots g_{l_{n-1} l_n}(\theta_n) g_{l_n T}$$

式中: S 、 T 分别为基础坐标系和工具坐标系; $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T \in Q$, Q 为位形空间. 设位于参考位形时坐标系 S 和 T 之间的刚体变换为 $g_{ST}(0)$, 第 i 个关节运动旋量坐标 ξ_i 对应于除第 i 个关节以外所有其他关节均固定于 $\theta_j = 0$ 位置时第 i 个关节的旋量运动. 转动关节及移动关节的运动旋量坐标分别为

$$\xi_i = \begin{bmatrix} -\omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{bmatrix}$$

$$\xi_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中: $\omega_i \in \mathbb{R}^3$ 是轴上的单位矢量; $q_i \in \mathbb{R}^3$ 为轴上任一点; $v_i \in \mathbb{R}^3$ 是指向移动方向的单位矢量. 将各关节运动加以组合, 即得到开链机器人运动正解的指数积公式:

$$g_{ST}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \cdots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{ST}(0)$$

开链机器人末端执行器的速度与各关节的速度

$$V_{ST}^s = J_{ST}^s(\theta) \dot{\theta}$$

其中

$$J_{ST}^s(\theta) = [\xi'_1 \quad \xi'_2 \quad \cdots \quad \xi'_n]$$

$$\xi_i' = Ad_{e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}}} \xi_i$$

为机器人的运动雅可比矩阵. 运动雅可比矩阵的第 i 列就是变换到机器人当前位形的第 i 个关节的运动螺旋. 机器人的物体雅可比矩阵定义为

$$J_{ST}^b(\theta) = [\xi_1^+ \quad \xi_2^+ \quad \dots \quad \xi_n^+]$$

$$\xi_i^+ = Ad_{e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n}} \xi_i$$

它使得 $V_{ST}^b = J_{ST}^b(\theta) \dot{\theta}$, 且有 $J_{ST}^s(\theta) = Ad_{g_{ST}(\theta)} J_{ST}^b(\theta)$.

3 Stanford 臂的运动学方程

图 2 所示为 6 自由度的机器人 Stanford 臂的参考位形 ($\theta = 0$), 它包括位于基座处的两个转动关节、一个移动关节和一个球腕.

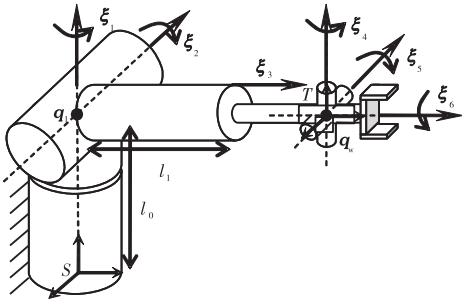


图 2 Stanford 臂的理想化模型

Fig.2 Ideal conceptual model of Stanford arm

该机构的运动学正解可通过计算各关节运动螺旋的运动而获得. $\theta = 0$ 时工具坐标系与基础坐标系的变换为

$$g_{ST}(0) = \begin{bmatrix} I & p_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ l_0 \end{pmatrix}$$

各个关节的运动螺旋可通过计算求得:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \begin{bmatrix} -\omega_1 \times q_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \\ \xi_2 &= \begin{bmatrix} -\omega_2 \times q_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = [0 \quad -l_0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T \\ \xi_3 &= \begin{bmatrix} v_3 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned}$$

同样方法可求得

$$\begin{aligned} \xi_4 &= [l_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \\ \xi_5 &= [0 \quad -l_0 \quad l_1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T \\ \xi_6 &= [-l_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \end{aligned}$$

指数积公式为 $g_{ST}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{ST}(0)$, 具体计算为 (其中记号: $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$, 下同)

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 & -l_0 s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 & l_0(1-c_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & l_1 s_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & l_1(1-c_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\hat{\xi}_5 \theta_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & s_5 & l_1(1-c_5) - l_0 s_5 \\ 0 & -s_5 & c_5 & l_1 s_5 + l_0(1-c_5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} = \begin{bmatrix} c_6 & 0 & s_6 & -l_0 s_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 & l_0(1-c_6) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是整个运动学正解方程为

$$g_{ST}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{ST}(0) = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若记 $R(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$, $p(\theta) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1 c_4 c_6 + c_1 s_4 s_5 s_6 - s_1 c_2 s_4 c_6 + s_1 c_2 c_4 s_5 s_6 + s_1 s_2 c_5 s_6 \\ r_{12} &= -c_1 s_4 c_5 - s_1 c_2 c_4 c_5 + s_1 s_2 s_5 \\ r_{13} &= c_1 c_4 c_6 - c_1 s_4 s_5 c_6 - s_1 c_2 s_4 s_6 - s_1 c_2 c_4 s_5 c_6 - s_1 s_2 c_5 c_6 \\ r_{21} &= s_1 c_4 c_6 + s_1 s_4 s_5 s_6 + c_1 c_2 s_4 c_6 - c_1 c_2 c_4 s_5 s_6 - c_1 s_2 c_5 s_6 \\ r_{22} &= -s_1 s_4 c_5 + c_1 c_2 c_4 c_5 - c_1 s_2 s_5 \\ r_{23} &= s_1 c_4 s_6 - s_1 s_4 s_5 c_6 + c_1 c_2 s_4 s_6 + c_1 c_2 c_4 s_5 c_6 + c_1 s_2 c_5 c_6 \\ r_{31} &= -s_2 s_4 c_6 + s_2 c_4 s_5 s_6 - c_2 c_5 s_6 \\ r_{32} &= -s_2 c_4 c_5 - c_2 s_5 \\ r_{33} &= -s_2 s_4 s_6 - s_2 c_4 s_5 c_6 + c_2 c_5 c_6 \\ p_1 &= -(l_1 + \theta_3) s_1 c_2 \\ p_2 &= (l_1 + \theta_3) c_1 c_2 \\ p_3 &= l_0 - (l_1 + \theta_3) s_2 \end{aligned}$$

4 Stanford 臂的雅可比矩阵

通过关节运动螺旋位置和方向的确定,可计算 Stanford 臂的运动雅可比矩阵.

由 $\xi'_1 = \xi_1$ 及 $\omega'_2 = (-c_1 \ -s_1 \ 0)^T$ 知

$$\xi'_2 = \begin{bmatrix} -\omega'_2 \times q_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = [l_0 s_1 \ -l_0 c_1 \ 0 \ -c_1 \ -s_1 \ 0]^T$$

第 3 个关节是移动副,因此仅需考虑其方向:

$$\xi'_3 = \begin{bmatrix} e^{\hat{z}\theta_1} e^{-\hat{x}\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -s_1 c_2 \ c_1 c_2 \ -s_2 \ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}^T$$

由

$$\omega'_4 = e^{\hat{z}\theta_1} e^{-\hat{x}\theta_2} (0 \ 0 \ 1)^T = [-s_1 s_2 \ c_1 s_2 \ c_2]^T$$

$$\omega'_5 = e^{\hat{z}\theta_1} e^{-\hat{x}\theta_2} e^{\hat{z}\theta_4} (-1 \ 0 \ 0)^T =$$

$$[-c_1 c_4 + s_1 c_2 s_4 \ -s_1 c_4 - c_1 c_2 s_4 \ s_2 s_4]^T$$

$$\omega'_6 = e^{\hat{z}\theta_1} e^{-\hat{x}\theta_2} e^{\hat{z}\theta_4} e^{-\hat{x}\theta_5} (0 \ 1 \ 0)^T =$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 c_2 c_4 c_5 - c_1 s_4 c_5 + s_1 s_2 s_5 \\ c_1 c_2 c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - c_1 s_2 s_5 \ -s_2 c_4 c_5 - c_2 s_5 \end{bmatrix}^T$$

可知

$$\xi'_4 = \begin{bmatrix} (l_1 + \theta_3 - l_0 s_2) c_1 \\ (l_1 + \theta_3 - l_0 s_2) s_1 \\ 0 \\ -s_1 s_2 \\ c_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\xi'_5 = \begin{bmatrix} l_0 (s_1 c_4 + c_1 c_2 s_4) - (l_1 + \theta_3) s_1 s_2 c_4 \\ l_0 (s_1 c_2 s_4 - c_1 c_4) + (l_1 + \theta_3) c_1 s_2 c_4 \\ (l_1 + \theta_3) c_2 c_4 \\ -c_1 c_4 + s_1 c_2 s_4 \\ -s_1 c_4 - c_1 c_2 s_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}$$

$$\xi'_6 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ (l_1 + \theta_3) c_2 s_4 c_5 \\ -s_1 c_2 c_4 c_5 - c_1 s_4 c_5 + s_1 s_2 s_5 \\ c_1 c_2 c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - c_1 s_2 s_5 \\ -s_2 c_4 c_5 - c_2 s_5 \end{bmatrix}$$

其中

$$a_1 = l_0 (s_1 s_4 c_5 - c_1 c_2 c_4 c_5 + c_1 s_2 s_5) - (l_1 + \theta_3) (s_1 s_2 s_4 c_5 + c_1 s_5)$$

$$a_2 = l_0 (s_1 s_2 s_5 - c_1 s_4 c_5 - s_1 c_2 c_4 c_5) + (l_1 + \theta_3) (c_1 s_2 s_4 c_5 - s_1 s_5)$$

由以上即可得出 Stanford 臂的运动雅可比矩阵为

$$J_{ST}^s(\theta) = [\xi'_1 \ \xi'_2 \ \cdots \ \xi'_6]$$

其中,第 j 列 ξ'_j 由上面给出.在此基础上,可以由公式 $J_{ST}^s(\theta) = A d_{g_{ST}(\theta)} J_{ST}^b(\theta)$ 得出 Stanford 臂的物体雅可比矩阵.

5 结 语

本文应用旋量理论推导了 6 自由度机构 Stanford 臂的运动学方程,给出了其雅可比矩阵.该过程显示了旋量方法对比 D-H 方法的明显的优越性和简洁性,为建立其动力学方程、控制方法及运动规划提供了基础.

参考文献:

- [1] Ball R S. A Treatise on the Theory of Screws [M]. Cambridge:Cambridge University Press,1900.
- [2] 理查德·摩雷,李泽湘,夏恩卡·萨思特里. 机器人操作的数学导论[M]. 徐卫良,钱瑞明,译. 北京:机械工业出版社,1998:11-80.
- [3] 朱大昌,方跃法. 应用螺旋理论对并联机器人形位的分析与综合[J]. 机器人,2005,27(6):539-544.
- [4] 叶平,孙汉旭,谭月胜,等. 旋量理论与矢量积法相结合求解雅可比矩阵[J]. 机械科学与技术,2005,24(3):353-356.
- [5] 刘武发,龚振邦,汪勤恣. 基于旋量理论的开链机器人动力学 Kane 方程研究[J]. 应用数学和力学,2005,26(5):577-584.
- [6] Jia Qing-xuan, Ye Ping, Sun Han-xu, et al. Kinematics of a trinal-branch space robotic manipulator with redundancy [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2005, 18(4): 378-384.
- [7] 陈文凯,刘平安,杨宏林. 基于反螺旋理论的 3-RSR 并联机器人雅可比矩阵研究[J]. 机械科学与技术,2007,26(5):606-609.