

# 一类非线性系统的自适应模糊控制器设计及稳定性分析

孙成功<sup>1</sup>, 李莉<sup>2</sup>

(1. 天津科技大学理学院, 天津 300457; 2. 天津师范大学计算机与信息工程学院, 300387)

**摘要:** 首先建立一种动态 T-S 模糊子系统, 用于估计非线性系统, 然后设计一种稳定的参考模型, 其前件与 T-S 模糊子系统相同. 在此基础上, 提出一种反馈控制器, 其控制矩阵采用线性矩阵不等式 (LMI) 的方法进行求解, 使得在数学模型已知的情况下, 闭环系统渐近稳定. 此外, 为补偿和消除实际系统中常存在的参数不确定性和外部干扰的影响, 进一步提出一种自适应模糊控制器, 能够在保障系统性能的情况下, 补偿参数不确定性, 并去除外界干扰的影响. 最后, 采用李亚普诺夫合成法证明闭环系统的稳定性. 仿真验证了该方法的有效性.

**关键词:** 线性矩阵不等式; 自适应模糊控制; T-S 模糊逻辑模型

中图分类号: O231 文献标志码: A 文章编号: 1672-6510(2011)06-0074-05

## Design of an Adaptive Fuzzy Controller for Nonlinear Systems and the Stability Analysis

SUN Cheng-gong<sup>1</sup>, LI Li<sup>2</sup>

(1. College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China;  
2. College of Computer and Information Engineering, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

**Abstract:** Some dynamic T-S fuzzy subsystems were presented to approximate a nonlinear system. The stable reference model with the same fuzzy sets as those of the T-S fuzzy subsystems rule was established. To make the states of the closed-loop system follow those of the reference model, a feedback controller was designed. The control gain can be solved by LMI approach. The closed-loop systems can be stable when the exact models are known. To compensate and eliminate the parameter uncertainty and disturbance usually existing in the practical plant, an adaptive fuzzy controller was further proposed. It can achieve the better performance, compensate the parameter uncertainty and alleviate the disturbance. Finally Lyapunov constitute technique was used to prove the stability of the closed loop systems. The simulations results illustrated the effectiveness of this approach.

**Keywords:** LMI; adaptive fuzzy control; T-S fuzzy model

从 20 世纪 80 年代开始, 模糊理论被广泛地用于非线性系统中<sup>[1-4]</sup>. 其优点主要是不需要已知被控系统的数学模型. 但是, 由于采用专家经验进行模糊建模和控制时, 缺少系统化的设计和稳定性证明方法, 有时反而不如采用其他理论. 为弥补这种缺陷, 人们提出了基于模型的模糊建模及控制方法——T-S 线性模型控制和 PDC (并行分布式补偿) 理论<sup>[5-8]</sup>. 首先用若干线性动态子系统来估计非线性动态, 在此基础上进行反馈子控制器的设计, 将其合成, 得到最后的控

制器. 其中的反馈增益可以采用最优控制和  $H_2$  控制方法得到. 这样可以直接应用线性系统的控制器设计方法. 但是, 大多数的工作需要假设 T-S 线性模型能够精确的估计非线性系统, 并且不存在干扰, 只有极少数的结果考虑到存在参数不确定性<sup>[5,9]</sup>或外部干扰下<sup>[10]</sup>的稳定性问题, 而这仍是此领域中的难点.

一些研究人员采用线性矩阵不等式 (LMI) 方法设计控制器, 需要不确定性和外部干扰满足匹配条件, 由于存在的约束较多, 结果有较大的保守性. 而

自适应模糊控制方法有望解决上述问题. Park Chang-Woo 等<sup>[11]</sup>将这种方法用于基于 T-S 模糊模型系统的控制中. 每个子系统的增益都能自适应调整. 但是, 这种方法建立在参数完全未知的基础上, 控制器很复杂, 这实际上降低了 T-S 模糊模型的优越性, 不能直接采用针对线性系统的控制器设计方法. 文献[12]提出一种基于 T-S 模型的鲁棒自适应模糊滑模控制器, 用自适应项来学习系统的不确定性. 文献[13]所提出的控制器包含两部分, 一部分由 LMI 设计得到, 一部分是间接自适应模糊控制器, 可以降低外部干扰的影响. 但是, 它们也都需要满足匹配条件.

本文结合反馈控制和自适应控制的优点, 提出一种新的控制器. 其中反馈控制增益可以通过 LMI 方法求得, 自适应控制项的参数可以在线调整, 用 Lyapunov 合成法证明闭环系统的稳定性. 仿真结果验证了该方法的有效性.

### 1 T-S 模糊模型及其控制器设计

考虑由 T-S 模型构成的连续非线性系统, 其第  $i$  条规则<sup>[14]</sup>

$R^i$ : 如果  $x_1(t)$  是  $M_1^i$ , 且  $\dots$ ,  $x_n(t)$  是  $M_n^i$ , 则

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (1)$$

$R^i (i=1, \dots, p)$  表示第  $i$  条规则,  $p$  是模糊规则的数量;  $M_j^i (j=1, \dots, n)$  是模糊集;  $x^T(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ ;  $u^T(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]$ ;  $A_i$  和  $B_i$  为由系统参数决定的系数矩阵.

对于给定的  $x(t)$  和  $u(t)$ , T-S 模型合成为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \xi_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

这里  $\xi_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^n M_j^i(x_j(t))}{\sum_{i=1}^p \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j(t))}$ , 为表示方便, 以后均简

写为  $\xi_i$ .

设参考模型和系统 (1) 有同样的模糊前件, 即

$R_m^i$ : 如果  $x_{1m}(t)$  是  $M_1^i$ , 且  $\dots$ ,  $x_{nm}(t)$  是  $M_n^i$ , 则

$$\dot{x}_m(t) = A_m^i x_m(t) \quad (3)$$

参考模型系统的输出为

$$\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^p \xi_i A_m^i x_m(t) \quad (4)$$

定义跟踪误差为

$$e(t) = x(t) - x_m(t) \quad (5)$$

由式 (2)、式 (4) 和式 (5) 可得

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^p \xi_i [A_i e(t) + (A_i - A_m^i) x_m(t) + B_i u(t)] \quad (6)$$

应用 PDC 理论, 设计一个模糊反馈控制器<sup>[4]</sup>, 拥有和式 (1)、式 (3) 系统相同的模糊前件, 形式为

$R^i$ : 如果  $x_1(t)$  是  $M_1^i$ , 且  $\dots$ ,  $x_n(t)$  是  $M_n^i$ , 则

$$u_f(t) = K_i e(t) \quad (7)$$

最后的控制器为式 (7) 的合成, 即

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^p \xi_i K_i e(t) \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (6), 闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j (A_i + B_i K_j) e(t) + \\ & \sum_{i=1}^p \xi_i (A_i - A_m^i) x_m \end{aligned} \quad (9)$$

以上可以看出, 为了补偿模糊系统和参考模型间的误差, 需要设计一个前馈控制器

$$u_q(t) = -\left(\sum_{i=1}^p \xi_i B_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^p \xi_i (A_i - A_m^i) x_m \quad (10)$$

最后的控制律为

$$u = u_f(t) + u_q(t) \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (6), 可得

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j [(A_i + B_i K_j) e(t)] \quad (12)$$

定理 1 给出了保证闭环模糊系统 (12) 稳定的充分条件.

**定理 1** 对于模糊控制系统 (12) 和反馈控制器增益  $K_j$ , 如果存在公共矩阵  $P = P^T > 0$  满足式 (13) 条件, 则闭环系统一致渐近稳定.

$$P(A_i + B_i K_j) + (A_i + B_i K_j)^T P < 0 \quad (13)$$

**证明** 选定 Lyapunov 函数

$$V(t) = e^T(t) P e(t) \quad (14)$$

求导得

$$\dot{V}(t) = e^T(t) P \dot{e}(t) + \dot{e}^T(t) P e(t) \quad (15)$$

将式 (12) 代入式 (15) 并进行整理, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j e^T [P(A_i + B_i K_j) + \\ & (A_i + B_i K_j)^T P] e \end{aligned} \quad (16)$$

因此只要式(13)成立,则有 $\dot{V}<0$ ,闭环系统渐近稳定,定理1成立.

因为式(13)是非凸的,不能直接用 Matlab 的 LMI 工具箱求解.令 $Q=P^{-1}$ , $K_j=Y_jQ^{-1}$ ,则在式(13)左右两侧分别乘以 $Q$ ,整理可得

$$QA_i^T + A_iQ + B_iY_j + Y_j^T B_i^T < 0 \quad (17)$$

式(17)是凸的,可以直接用 Matlab 的 LMI 工具箱求解.

需要注意的是,这里要求矩阵 $(\sum_{i=1}^p \xi_i B_i)^{-1}$ 非奇异,可以采用文献[15]的方法来判断.另外,为了补偿模糊系统和参考模型间的误差,在控制器里增加了一个前馈项 $u_q$ .

## 2 基于 T-S 模型的自适应控制器设计

上一部分假设模糊模型是精确的,其参数能够提前预知.但是在实际系统中,有时很难满足.这往往导致所建立的模糊模型存在参数不确定性,而且实际系统也经常会受到外界干扰的影响,系统性能遭到恶化.为解决这些问题,提出一种新的控制器,该控制器的第一部分主要用于实现状态跟踪,第二部分用于补偿不确定性,去除干扰的影响.

考虑一个连续非线性系统,由以下模糊规则描述 $R^i$ :如果 $x_1(t)$ 是 $M_1^i$ 且 $\dots$ , $x_n(t)$ 是 $M_n^i$ ,则

$$\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t) + \omega_i \quad (18)$$

式中: $\Delta A_i$ 为不确定参数矩阵; $\omega_i$ 为外部干扰.

给定 $x$ 和 $u$ ,设 T-S 模糊模型为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \xi_i [(A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t) + \omega_i] \quad (19)$$

这里假设模糊模型中存在不确定参数矩阵 $\Delta A_i$ ,为采用 LMI 的方法求解此时的控制器增益 $K_j$ ,多数文献均需假设 $\Delta A_i$ 满足匹配条件<sup>[12-13]</sup>.而本文把 $\Delta A_i$ 作为未知参数,用模糊逻辑系统进行逼近,不需要 $\Delta A_i$ 满足匹配条件,从而能降低系统的保守性.

设参考模型为式(3)和式(4),对误差 $e(t)$ 求导得

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^p \xi_i [A_i e + (A_i - A_m^i)x_m + B_i u + \Delta A_i x + \omega_i] \quad (20)$$

令

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \xi_i \Delta A_i x \quad (21)$$

可以用一个模糊估计器进行估计

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^N \mu_i \hat{\theta}_i \quad (22)$$

式中: $\hat{\theta}_i$ 为需自适应调整的参数; $\mu_i$ 为隶属度函数; $N$ 为模糊规则数.

定义最小估计误差为

$$w^* = f(x) - \sum_{i=1}^N \mu_i \hat{\theta}_i^* \quad (23)$$

式中, $\hat{\theta}_i^*$ 是理想的估计参数.

可以设计一种新的控制器

$$u = u_1 + u_2 \quad (24)$$

其中 $u_1$ 与式(11)相同.

$$u_2 = -g^{-1} \sum_{i=1}^N \mu_i \hat{\theta}_i + u_s \quad (25)$$

$$u_s = -g^{-1}(e + D \text{sgn} e) \quad (26)$$

式中: $D$ 是外部干扰的上界; $g^{-1} = \sum_{i=1}^p \xi_i B_i$ ;  $\text{sgn} e$ 为以 $e$ 为自变量的符号函数.

自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}_i^T = \mu_i e^T \quad (27)$$

这里提出的控制器包含三项:第一项是传统的反馈控制律,以便实现跟踪性能;第二项是前馈控制项,以补偿模糊系统和参考模型间的误差;最后一项是自适应项,可以消除系统的不确定性和外部干扰的影响.

根据式(20)、(24)、(25)和(26),可以推导得到

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j (A_i + B_i K_j) e(t) + \\ & f(x) + \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i + g u_s - \sum_{i=1}^N \mu_i \hat{\theta}_i = \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j (A_i + B_i K_j) e(t) + f(x) - \sum_{i=1}^N \mu_i \hat{\theta}_i^* + \\ & \sum_{i=1}^N \mu_i (\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}_i) + g u_s + \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i = \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j (A_i + B_i K_j) e(t) + w^* + \\ & \sum_{i=1}^N \mu_i (\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}_i) + g u_s + \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i \end{aligned} \quad (28)$$

由此可得定理2.

**定理 2** 对于模糊控制系统(20)和反馈控制器增益 $K_j$ ,采用控制律(24)、(25)、(26)及自适应律(27),如果存在公共矩阵 $P = P^T > 0$ 满足式(29)条件,则闭环系统一致渐近稳定.

$$P(A_i + B_i K_j) + (A_i + B_i K_j)^T P < 0 \quad (29)$$

与定理1相同,反馈控制器增益 $K_j$ 可以通过变

换式(29)后, 使用 Matlab 的 LMI 工具箱求解得到. 除了用标准的求解算法求解 LMI, 一些研究者为减小系统的保守性而提出的各种改进算法均可采用.

以下给出定理 2 的证明.

**证明** 选择 Lyapunov 函数

$$V = e^T P e + \sum_{l=1}^N (\hat{\theta}_l - \theta_l^*)^T (\hat{\theta}_l - \theta_l^*) \quad (30)$$

对式(30)求导并整理得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e^T P \dot{e} + \dot{e}^T P e - 2 \sum_{l=1}^N \dot{\hat{\theta}}_l^T (\theta_l^* - \hat{\theta}_l) = \\ & e^T \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j [P(A_i + B_i K_j) + (A_i + B_i K_j)^T P] e + \\ & 2e^T P [\sum_{l=1}^N \mu_l (\theta_l^* - \hat{\theta}_l) + g u_s + \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i + w^*] - \\ & 2 \sum_{l=1}^N \dot{\hat{\theta}}_l^T (\theta_l^* - \hat{\theta}_l) \end{aligned} \quad (31)$$

把式(27)代入式(31)得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_i \xi_j e^T [P(A_i + B_i K_j) + (A_i + B_i K_j)^T P] e + \\ & 2e^T P (w^* + g u_s + \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i) \end{aligned} \quad (32)$$

若式(29)成立, 并考虑式(26), 则式(32)变为

$$\begin{aligned} \dot{V} < & 2e^T P (w^* + g u_s + \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i) < \\ & 2(e^T P)(e^T P)^T + 2w^{*T} w^* + 2e^T P (g u_s + \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i) < \\ & -2[e^T P] D + 2e^T P \sum_{i=1}^p \xi_i \omega_i + 2w^{*T} w^* < \\ & 2w^{*T} w^* \end{aligned} \quad (33)$$

若  $w^* = \theta$ , 即  $\hat{f}$  的寻优空间可以扩展得足够大, 足以将  $f$  包括在里面, 因此有  $\dot{V} < 0$ . 又根据万能逼近定理, 即使  $w^* \neq \theta$ , 则只要采用足够复杂的  $\hat{f}$ , 仍然可以希望得到很小的  $w^*$ , 使得闭环系统渐近稳定. 定理 2 得证.

### 3 仿 真

考虑一个非线性动态系统由下列规则构成

$R^i$ : 如果  $x_1(t)$  是  $M_1^i$ , 且  $x_2(t)$  是  $M_2^i$ , 则

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, \dots, 9 \quad (34)$$

式中:  $A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i \end{bmatrix}; B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{bmatrix}$ .

选择稳定参考模型为

$R_m^i$ : 如果  $x_{1m}(t)$  是  $M_1^i$ , 且  $x_{2m}(t)$  是  $M_2^i$ , 则

$$\dot{x}_m(t) = A_m^i x_m(t) \quad i = 1, \dots, 9 \quad (35)$$

采用高斯隶属函数, 不确定参数矩阵和外部干扰为

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \omega = [\sin t \quad \cos t]^T$$

这里  $\Delta A$  无需满足文献[13]中需要的匹配条件, 即不需找到文献[13]中提到的定常矩阵  $D_{A_i}$  和  $E_{A_i}$ , 能有效减少系统的保守性. 仿真结果见图 1 和图 2. 从中可以看到, 即使存在干扰的情况下, 实际状态可以很好地跟踪参考状态.

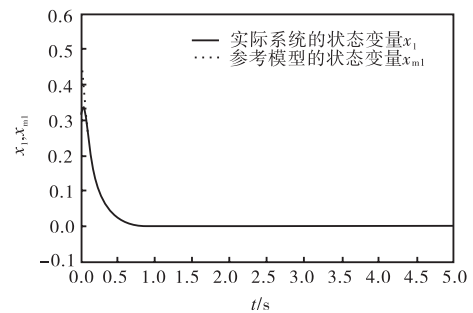


图 1 实际系统的状态变量  $x_1$  和参考模型的状态变量  $x_{m1}$  随时间变化轨迹曲线

Fig.1 Trajectories of the actual system states  $x_1$  and reference model states  $x_{m1}$

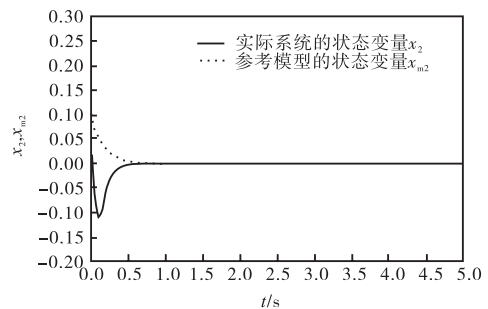


图 2 实际系统的状态变量  $x_2$  和参考模型的状态变量  $x_{m2}$  随时间变化轨迹曲线

Fig.2 Trajectories of the actual system states  $x_2$  and reference model states  $x_{m2}$

### 4 结 语

本文采用 T-S 模糊子系统建立非线性系统的模型, 然后设计一种前件与该 T-S 模糊子系统相同的稳定参考模型. 在此基础上, 针对系统是否存在参数不确定性和外界干扰, 分别设计了两种控制器. 对于不存在参数不确定性和外界干扰的系统, 控制器由两部分组成, 其中前馈控制项用于补偿模糊系统和参考

模型间的误差,反馈控制项的增益采用 LMI 的方法求得.对于存在参数不确定性和外界干扰的系统,控制器除了前馈和反馈项之外,还增加了自适应项,用于消除系统的不确定性和外部干扰的影响.采用 Lyapunov 合成法证明闭环系统的稳定性.最后,仿真结果验证了此种方法的有效性.

#### 参考文献:

- [1] Lee C C. Fuzzy logic in control systems:Fuzzy logic controller-Part I[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1990, 20(2) : 404-418.
- [2] Lee C C. Fuzzy logic in control systems:Fuzzy logic controller-Part II[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1990, 20(2) : 419-435.
- [3] Wang Li-Xin. Stable adaptive fuzzy controller with application to inverted pendulum tracking[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, 1996, 26(5) : 677-691.
- [4] Senthilkumar T, Balasubramaniam P. Delay-dependent robust  $H_{\infty}$  control for uncertain stochastic T-S fuzzy systems with time-varying state and input delays[J]. International Journal of Systems Science, 2011, 42(5) : 877-887.
- [5] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability,  $H^{\infty}$  control theory, and linear matrix inequalities[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4(1) : 1-13.
- [6] Chen B S, Tseng C S, Uang H J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(5) : 571-585.
- [7] Wu S J, Lin C T. Optimal fuzzy controller design: local concept approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(2) : 171-185.
- [8] Hou Y Y, Liao T L, Yan J J, et al. Guaranteed cost control for uncertain non-linear systems with time-varying delays using T-S fuzzy model[J]. International Journal of General Systems, 2009, 38(5) : 485-504.
- [9] Kiriakidis K. Non-linear control system design via fuzzy modeling and LMIs[J]. International Journal of Control, 1999, 72(7) : 676-685.
- [10] Teixeira Marcelo C M, Zak Stanislaw H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(2) : 133-142. .
- [11] Park Chang-Woo, Lee Chang-Hoon, Park, Mignon. Design of an adaptive fuzzy model based controller for chaotic dynamics in Lorenz systems with uncertainty[J]. Information Sciences, 2002, 147(1/2/3/4) : 245-266.
- [12] Hwang Chih-Lyang. A novel Takagi-Sugeno-based robust adaptive fuzzy sliding-mode controller[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004, 12(5) : 676-687.
- [13] Zheng F, Wang Q G, Lee T H. Adaptive and robust controller design for uncertain nonlinear systems via fuzzy modeling approach[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 2004, 34(1) : 166-178.
- [14] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, 15(1) : 116-132.
- [15] Lam H K, Leung F H F, Tam P K S. Fuzzy control of a class of multivariable nonlinear systems subject to parameter uncertainties: model reference approach[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2001, 26(2) : 129-144.