第 26 卷 第 5 期
2011 年 10 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.26 No. 5
Oct. 2011

有向图的负控制数及其下界

邢化明[1]，李文升[2]
（1. 天津科技大学理学院，天津 300457；2. 廊坊师范学院数学系，廊坊 065000）

摘 要：设 $D=(V,E)$ 为一个有向图，对于函数 $f:V\to\{-1,0,1\}$，如果对任意的 $v\in V$，均有 $f(N_D^-[v])\geqslant 1$ 成立，则称 f 为图 D 的一个负控制函数，图 D 的负控制数 $\gamma^-(D)=\min\{w(f)\mid f$ 是 D 一个负控制函数$\}$. 给出几类有向图的负控制数的值，并得到一般有向图的负控制数的几个下界.

关键词：负控制；有向图；下界
中图分类号：O157.5 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6510（2011）05-0076-03

Minus Domination Numbers and Its Lower Bounds in Directed Graphs

XING Hua-ming[1]，LI Wen-sheng[2]
（1. College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China；
2. Department of Mathematics，Langfang Normal School，Langfang 065000，China）

Abstract：Let $D=(V,A)$ be a digraph. For a function $f:V(D)\to\{-1,0,1\}$，if $f(N^-[v])\geqslant 1$ for each vertex $v\in V$，then f is called a minus dominating function on D. The minus domination number $\gamma^-(D)=\min\{w(f)\mid f$ is a minus dominating function on $D\}$. The minus domination numbers were given for a few types of digraphs. And some lower bounds were obtained for minus domination number of general digraphs.

Keywords：minus domination；directed graph；lower bound

近年来，图的控制理论的研究内容越来越广泛，各种控制概念相继产生，其中图的负控制数就是图的控制理论中的一个重要参数.图的负控制由 Dunbar 等[1]于 1996 年首先提出，国内外很多图论工作者对图的负控制进行了研究，研究成果不断丰富[2–8].以往关于图的控制理论的研究主要是基于无向图，对于有向图的研究目前文献较少[9–10]，特别是关于有向图负控制方面的研究在国内外还未见报道.本文对有向图的负控制进行研究，给出几类特殊有向图的负控制数，并得到了一般有向图的几个下界.

1 基本概念与符号

本文所指的图均为有向简单图，文中未定义的符号及术语同文献[11].

设 $D=(V,E)$ 为一个有向图，记 $|V(D)|=n$.对任意的 $v\in V(D)$，v 的入度闭邻域 $N^-[v]=\{u\mid(u,v)\in E\}\cup\{v\}$. v 的出度为 $d^+(v)$，入度为 $d^-(v)$，v 的度 $d(v)=d^+(v)+d^-(v)$.图 D 最大度、最大入度和最大出度分别记为 Δ、Δ^- 和 Δ^+；最小度、最小入度和最小出度分别记为 δ、δ^- 和 δ^+ .

如果 f 是 $S\subseteq V(D)$ 到实数集的一个映射，则记 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$.特别地，$w(f)=f(V(D))$ 称为 f 的权重.

定义 1 设 $D=(V,E)$ 为一个有向图，对于函数 $f:V\to\{-1,0,1\}$，如果对任意的 $v\in V$，均有 $f(N_D^-[v])\geqslant 1$ 成立，则称 f 为图 D 的一个负控制函数，图 D 的负控制数 $\gamma^-(D)=\min\{w(f)\mid f$ 是 D 一个负控制函数$\}$.

2 特殊图的负控制数

定理 1 设 C_n 是阶为 n 的有向圈，$\gamma^-(C_n)=\lceil n/2\rceil$.

证明 将 C_n 的点依序标记为 v_1，v_2，…，v_n.设 f

收稿日期：2011–04–15；**修回日期**：2011–04–29
作者简介：邢化明（1962—），男，河北人，教授，hmxing@tust.edu.cn.

为 C_n 的一个负控制函数，则

$$f(N^-[v_1])=f(v_n)+f(v_1)\geqslant 1$$
$$f(N^-[v_2])=f(v_1)+f(v_2)\geqslant 1$$
$$\vdots$$
$$f(N^-[v_n])=f(v_{n-1})+f(v_n)\geqslant 1$$

将这 n 个不等式左右分别相加，可得

$$2(f(v_1)+f(v_2)+\cdots+f(v_n))\geqslant n$$

即 $w(f)\geqslant n/2$.由于 $w(f)$ 为整数，有 $w(f)\geqslant\lceil n/2\rceil$，所以 $\gamma^-(C_n)\geqslant\lceil n/2\rceil$.

另一方面，对于任意的点 $v_i\in V(C_n)$，令

$$g(v_i)=\begin{cases}1, & i\text{ 为奇数}\\ 0, & i\text{ 为偶数}\end{cases}$$

则 g 为 C_n 的一个负控制函数，且 $w(g)=m=\lceil n/2\rceil$.因此，$\gamma^-(C_n)=\lceil n/2\rceil$.

无向完全图 K_n 的每条边都加上方向而得到的有向图称为竞赛图. 下面将研究两个特殊竞赛图的负控制数.

若点集为 $V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的图 D 满足 $(v_i,v_j)\in E$ 当且仅当 $i<j$，则称图 D 为无圈竞赛图，记为 $AT(n)$.

令 n 为不小于 3 的正奇数.设 $n=2k+1$，对于点集为 $V(D)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$ 的图 D，若对任意的 i，都有 k 条从 v_i 指向 $v_{i+1},v_{i+2},\cdots,v_{i+k}$ 的有向边，其中的下标 $i+1,i+2,\cdots,i+k$ 模 n 求余，则称图 D 为循环竞赛图，记为 $CT(n)$.

定理 2　设 $AT(n)$ 为 $n\,(n\geqslant 3)$ 阶无圈竞赛图，则 $\gamma^-(AT(n))=1$.

证明　根据 $AT(n)$ 定义，有 $V(AT(n))=N^-[v_n]$.设 f 是$AT(n)$ 的一个负控制函数，则 $w(f)=f(V(AT(n)))=f\left(N^-[v_n]\right)\geqslant 1$.所以 $\gamma^-(AT\ (n))\geqslant 1$.

下面分情况讨论.

若 n 为偶数.考虑函数 $f:V(AT(n))\to\{-1,0,1\}$，使得：当 $1\leqslant i\leqslant n/2$ 时，$f(v_i)=1$；当 $i=n/2+1$ 时，$f(v_i)=0$；当 $n/2+2\leqslant i\leqslant n$ 时，$f(v_i)=-1$.则，当 $1\leqslant i\leqslant n/2$，有 $f\left(N^-[v_i]\right)=i\geqslant 1$；当 $i=n/2+1$ 时，有 $f\left(N^-[v_i]\right)=n/2\geqslant 1$；当 $n/2+2\leqslant i\leqslant n$ 有 $f\left(N^-[v_i]\right)=n-i+1\geqslant 1$.故 f 是一个负控制函数且 $w(f)=1$，故 $\gamma^-(AT(n))\leqslant 1$.

若 n 为奇数，考虑函数 $f:V(AT(n))\to\{-1,0,1\}$，使得：当$1\leqslant i\leqslant(n+1)/2$ 时，$f(v_i)=1$；当 $(n+3)/2\leqslant i\leqslant n$ 时，$f(v_i)=-1$.则，当 $1\leqslant i\leqslant(n+1)/2$ 时，有 $f(N^-[v_i])=i\geqslant 1$；当 $(n+3)/2\leqslant i\leqslant n$ 时，有 $f(N^-[v_i])=n-i+1\geqslant 1$.故 f 为负控制函数且 $w(f)=1$，因此 $\gamma^-(AT(n))\leqslant 1$.

综上所述，$\gamma^-(AT(n))=1$.

定理 3　设 $CT(n)$ 为奇阶 $n\geqslant 3$ 的循环竞赛图，则 $\gamma^-(CT(n))=2$.

证明　设 f 为 $CT(n)$ 的一个负控制函数.根据 $CT(n)$ 定义，对任意的 $v_i\in V(CT(n))$ 有 $N^-[v_i]=\{v_{i-k},\cdots,v_{i-1},v_i\}$，下标模 n 求余.故有 $f(N^-[v_i])=f(v_{i-k})+\cdots+f(v_{i-1})+f(v_i)\geqslant 1$，令 $i=0,1,2,\cdots,n-1$，可得

$$f(N^-[v_0])=f(v_{n-k})+\cdots+f(v_{n-1})+f(v_0)\geqslant 1$$
$$f(N^-[v_1])=f(v_{n-k+1})+\cdots+f(v_0)+f(v_1)\geqslant 1$$
$$\vdots$$
$$f(N^-[v_{n-1}])=f(v_{n-k-1})+\cdots+f(v_{n-2})+f(v_{n-1})\geqslant 1$$

对上述不等式两边分别相加，可得

$$(k+1)(f(v_0)+f(v_1)+\cdots+f(v_{n-1}))\geqslant n$$

故 $w(f)=(f(v_0)+f(v_1)+\cdots+f(v_{n-1}))\geqslant\dfrac{n}{k+1}=\dfrac{2k+1}{k+1}$，而 $w(f)$ 为整数，可得 $w(f)\geqslant 2$，即 $\gamma^-(CT(n))\geqslant 2$.

对于任意的 $CT(n)$，令 $V^-=\varnothing$，$V^+=\{v_0,v_{k+1}\}$，$V^0=\{v_1,v_2,\cdots,v_k,v_{k+2},\cdots,v_{n-1}\}$.定义函数 $f:V\to\{-1,0,1\}$，使得：当 $v\in V^0$ 时，$f(v)=0$；当 $v\in V^+$ 时，$f(v)=1$.则对任意的 $v\in V(CT(n))$，有 $f(N^-[v])\geqslant 1$.故 f 是 C_n 的一个负控制函数，且 $w(f)=2$，因此 $\gamma^-(CT(n))\leqslant 2$.

综上所述，$\gamma^-(CT(n))=2$.

3　有向图负控制数的下界

定理 4　设 D 为阶 $n\geqslant 3$ 的有向图，则 $\gamma^-(D)\geqslant 4-n$，且这个界是紧致的.

证明　设 f 为图 D 的一个负控制函数.若对任意的 $v\in V(D)$，均有 $f(v)\geqslant 0$，则任取 $V(D)$ 中一点 v，有 $w(f)\geqslant f(N^-[v])\geqslant 1$，根据假设，有 $w(f)\geqslant 1\geqslant 4-n$.若存在 $v\in V(D)$，使得 $f(v)=-1$，由于 $f(N^-[v])\geqslant 1$，则至少存在两个赋值为 1 的点属于 $N^-[v]$，即 $|V^+|\geqslant 2$，又由于 $|V^+|+|V^-|\leqslant n$，故 $|V^-|\leqslant n-|V^+|\leqslant n-2$，有 $w(f)=|V^+|-|V^-|\geqslant 2-(n-2)=4-n$，即 $\gamma^-(D)\geqslant 4-n$.

对于阶为 $n\geqslant 3$ 的图 D，令 $V^-=\{v_3,v_4,\cdots,v_n\}$，$V^0=\varnothing$，$V^+=\{v_1,v_2\}$，点集 $V(D)=V^+\cup V^0\cup V^-$，边集

$E(D)=\{(v_1,v_3),\cdots,(v_1,v_n),(v_2,v_3),\cdots,(v_2,v_n)\}$.考虑映射 $f:V(D)\to\{-1,0,1\}$，使得：当 $v\in V^+$ 时，$f(v)=1$；当 $v\in V^0$ 时，$f(v)=0$；当 $v\in V^-$ 时，$f(v)=-1$.则对任意的 $v\in V(D)$ 有 $f(N^-[v])=1$，所以 f 为 D 的一个负控制函数且 $w(f)=4-n$，这表明 $\gamma^-(D)=4-n$，即这个界是紧致的.

由定理 4 可知有向图的负控制数可以任意小.

推论　对任意正整数 t，都存在有向图 D 使得 $\gamma^-(D)=-t$.

定理 5　设 D 是最大度为 $\Delta\geqslant 2$ 的 n 阶有向图，则 $\gamma^-(D)\geqslant\frac{2-\Delta}{2+\Delta}n$.

证明　设 f 为 D 的一个负控制函数.令 $V^-=\{v\,|\,f(v)=-1,v\in V(D)\}$，$V^0=\{v\,|\,f(v)=0,v\in V(D)\}$，$V^+=\{v\,|\,f(v)=1,v\in V(D)\}$．若 $V^-=\varnothing$，结果显然成立．若 $|V^-|\geqslant 1$，设 $E_1=\{(u,v)\,|\,u\in V^+,v\in V^-,(u,v)\in E(D)\}$，令 $k=|E_1|$.对任意的 $v\in V^-$，必有 $f(N^-[v])\geqslant 1$，因此从 V^+ 中的点指向 v 的边至少有 2 条，故 $k\geqslant 2|V^-|$.由于 D 中点的最大度为 Δ，所以 $k\leqslant|V^+|\Delta$.联立不等式可得 $|V^+|\geqslant 2|V^-|/\Delta$，则有 $n\geqslant|V^+|+|V^-|\geqslant(2+\Delta)|V^-|/\Delta$，即 $|V^-|\leqslant\frac{\Delta n}{\Delta+2}$.则有 $w(f)=|V^+|-|V^-|\geqslant\frac{2-\Delta}{\Delta}|V^-|\geqslant\frac{2-\Delta}{2+\Delta}n$．因此，$\gamma^-(D)\geqslant\frac{2-\Delta}{2+\Delta}n$.

定理 6　设 D 是满足 $\Delta^+\geqslant\delta^++2$ 的 n 阶有向图，则 $\gamma^-(D)\geqslant\frac{2+\delta^+-\Delta^+}{2+\delta^++\Delta^+}n$.

证明　设 f 为 D 的一个负控制函数.令 $V^-=\{v\,|\,f(v)=-1,v\in V(D)\}$，$V^0=\{v\,|\,f(v)=0,\ v\in V(D)\}$，$V^+=\{v\,|\,f(v)=1,v\in V(D)\}$.若 $|V^-|=0$，结果显然成立.若 $|V^-|\geqslant 1$，对任意的 $v\in V^-$，必有 $f(N^-[v])\geqslant 1$，因此从 V^+ 中的点指向 v 的边至少有 2 条，故从 V^+ 指向 V^- 的边至少有 $2|V^-|$ 条.由题设，以 V^- 中的点为始点的边至少有 $\delta^+|V^-|$ 条，对其中每一条边的终点，至少要对应有一条 V^+ 中的点为始点的边指向该终点，故以 V^+ 中的点为始点的边至少为 $2|V^-|+\delta^+|V^-|$ 条.则 $|V^+|\geqslant\frac{2+\delta^+}{\Delta^+}|V^-|$，故 $n\geqslant|V^+|+|V^-|\geqslant\frac{(2+\delta^++\Delta^+)}{\Delta^+}|V^-|$，即 $|V^-|\leqslant\frac{\Delta^+}{2+\delta^++\Delta^+}n$．因此，$w(f)=|V^+|-|V^-|\geqslant\frac{2+\delta^+-\Delta^+}{\Delta^+}|V^-|\geqslant\frac{2+\delta^+-\Delta^+}{2+\delta^++\Delta^+}n$.

所以，$\gamma^-(D)\geqslant\frac{2+\delta^+-\Delta^+}{2+\delta^++\Delta^+}n$.

参考文献：

[1] Dunbar J, Hedetniemi S, Henning M A, et al. Minus domination in regular graphs[J]. Discrete Mathematics, 1996, 149(1/2/3): 311–312.

[2] Dunbar J, Goddard W, Hedetniemi S, et al. The algorithmic complexity of minus domination in graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1996, 68(1/2): 73–84.

[3] Dunbar J, Hedetniemi S, Henning M A, et al. Minus domination in graphs[J]. Discrete Mathematics, 1999, 199(1/2/3): 35–47.

[4] Damaschke P. Minus domination in small-degree graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2001, 108(1/2): 53–64.

[5] Kang L Y, Cai M C. Upper minus domination in regular graphs[J]. Discrete Mathematics, 2000, 219(1/2/3): 135–144.

[6] Xing H M, Sun L. On minus paired-domination in graphs[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2003, 12(2): 202–204.

[7] Xing H M, Liu H L. Minus total domination in graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2009, 59(4): 861–870.

[8] Zelinka B. Signed and minus domination in bipartite graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2006, 56(2): 587–590.

[9] Zelinka B. Signed domination numbers of directed graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2005, 55(2): 479–482.

[10] Karami H, Sheikholeslami S M, Khodkar A. Lower bounds on the signed domination numbers of directed graphs[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(8): 2567–2570.

[11] Bondy J A, Murty V S R. Graph Theory with Application[M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.