第26卷 第5期
2011年10月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.26 No. 5
Oct. 2011

不确定广义系统非脆弱混合 H_2/H_∞ 优化控制

李晓霞[1]，王汝凉[2]，赵鹏起[1]，庄明辉[3]

（1. 佳木斯大学理学院，佳木斯 154007；2. 广西师范学院信息技术系，南宁 530023；
3. 佳木斯大学材料科学与工程学院，佳木斯 154007）

摘 要：针对不确定广义系统非脆弱混合 H_2/H_∞ 优化控制问题，对控制器增益具有加法式摄动和乘法式摄动两种情形采用线性矩阵不等式方法研究其充分条件，并设计满足要求的鲁棒非脆弱混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器，使得闭合系统在满足 H_∞ 性能的前提下极小化 H_2 范数的上界.

关键词：广义系统；线性矩阵不等式；稳定性

中图分类号：TP13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6510(2011)05-0066-06

Non-Fragile Mixed H_2/H_∞ Optimal Control for an Uncertain Singular System

LI Xiao-xia[1]，WANG Ru-liang[2]，ZHAO Peng-qi[1]，ZHUANG Ming-hui[3]

(1. School of Science, Jiamusi University, Jiamusi 154007, China;
2. Department of Information Technology, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530023, China;
3. School of Materials Science and Engineering, Jiamusi University, Jiamusi 154007, China)

Abstract: The problem of non-fragile mixed H_2/H_∞ optimal control is considered for an uncertain singular system. Two classes of perturbations are considered, namely, additive and multiplicative. In these two cases, the sufficient conditions are derived and a mixed H_2/H_∞ state feedback controller is designed using a set of linear matrix inequalities (LMIs), and the resulting closed-loop system is asymptotic stable subject to a H_∞ norm constraint, also, the minimal upper bound of H_2 performance measure.

Keywords: singular systems; linear matrix inequalities (LMIs); stability

在控制系统的设计中，通常不仅要求系统稳定，还要使得系统达到某一性能指标，即实现系统的优化控制. 而混合 H_2/H_∞ 控制问题的主要任务是：在保证一个传递函数的 H_∞ 范数受限的同时，极小化另一传递函数的 H_2 范数，它将 H_2 性能设计与 H_∞ 性能设计相结合，使闭环系统一方面获得优良的调节性能，另一方面又具有较好的鲁棒性，具有重要的研究与应用价值. 1989 年，Bernstein 等[1]首次提出混合 H_2/H_∞ 控制问题，借助线性矩阵不等式，杨冬梅等[2]研究了广义系统混合 H_2/H_∞ 控制问题，Yue 等[3]和 Xiang 等[4]研究了不确定广义系统混合 H_2/H_∞ 控制问题. 文献[2–4]均未考虑控制器摄动的问题.

1 问题描述

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{z}_\infty=(\boldsymbol{C}_1+\Delta\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{z}_2=(\boldsymbol{C}_2+\Delta\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}(t)$ 分别为状态和干扰输入；$\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{z}_\infty(t)$，$\boldsymbol{z}_2(t)$ 分别为控制输入和被调输出；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{D}_i$ $(i=1,2)$ 均为适维矩阵；$\boldsymbol{E}$ 为适维奇异阵；$\Delta\boldsymbol{A}$, $\Delta\boldsymbol{C}_1$，$\Delta\boldsymbol{C}_2$ 均为不确定参数，且满足如下有界条件：

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{MFG},\Delta\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{M}_{C_1}\boldsymbol{F}_{C_1}\boldsymbol{G}_{C_1},\Delta\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{M}_{C_2}\boldsymbol{F}_{C_2}\boldsymbol{G}_{C_2}$$

收稿日期：2011–05–11；**修回日期**：2011–07–10
基金项目：黑龙江省教育厅项目(11553115)
作者简介：李晓霞（1979— ），女，黑龙江佳木斯人，讲师，硕士；**通信作者**：庄明辉，讲师，博士，zhuangminghuihj@163.com.

假设其正则、状态可测，设计如下形式的状态反馈控制器：

$$\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

式中：K 为控制器增益；$\Delta\boldsymbol{K}$ 表示增益的摄动.

考虑以下两种形式的摄动：

(1)加法式摄动

$$\Delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1\leqslant\boldsymbol{I} \tag{3}$$

(2)乘法式摄动

$$\Delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{K},\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2\leqslant\boldsymbol{I} \tag{4}$$

式(1)系统在式(2)控制器的作用下形成的闭环系统为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_K\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{\omega}(t)\\ \boldsymbol{z}_\infty=\boldsymbol{C}_{K1}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{C}_{K2}\boldsymbol{x}(t)\end{cases} \tag{5}$$

式中：

$$\boldsymbol{A}_K=\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})$$

$$\boldsymbol{C}_{K1}=\boldsymbol{C}_1+\Delta\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})$$

$$\boldsymbol{C}_{K2}=\boldsymbol{C}_2+\Delta\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})$$

为了给出稳定性准则，先介绍如下定义及引理.

定义 1[5] 如果广义系统稳定且无脉冲，则称广义系统是容许的.

引理 1[2] 系统(5)是容许的，且使得$\|\boldsymbol{T}_{z_\infty\omega}\|_\infty<\gamma$的充要条件是，存在矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足：

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant 0\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_K & \boldsymbol{C}_{K1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{C}_{K1} & -\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0\end{cases} \tag{6}$$

记 $\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{QPB}_1$，其中 $\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$ 为两可逆矩阵，使式(5)系统具有第一种受限等价形式.

引理 2[2] 设 $\boldsymbol{T}_{z_2\omega}(s)$ 是严格真的. 如果存在矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 及 $\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{m\times m}$ 满足：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_K & \boldsymbol{C}_{K2}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{C}_{K2} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{B}}\\ \bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}\geqslant 0\end{cases} \tag{7}$$

则系统(5)是容许的，且

$$\|\boldsymbol{T}_{z_2\omega}(s)\|_2^2\leqslant trace(\boldsymbol{Y}).$$

引理 3[6] 设 $\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Gamma}$,和$\boldsymbol{\Phi}$ 是具有适当维数的矩阵，且 $\boldsymbol{\Omega}$ 对称，则不等式 $\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\Gamma F\Phi}+(\boldsymbol{\Gamma F\Phi})^{\mathrm{T}}<0$ 对所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$ 的 $\boldsymbol{F}$ 成立的充分必要条件是，存在标量 $\lambda>0$，使得 $\boldsymbol{\Omega}+\lambda\boldsymbol{\Gamma\Gamma}^{\mathrm{T}}+\lambda^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}<0$ 成立.

2 主要结果

定理 1 式(1)系统在具有式(3)加法式摄动的式(2)状态反馈控制器作用下，闭环系统是容许的且满足 $\|\boldsymbol{T}_{z_\infty\omega}\|_\infty<\gamma$ 的充要条件是，存在矩阵 $\boldsymbol{V}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{q\times n}$ 及 $\varepsilon>0$，使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{EV} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & -\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{AV}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}+(\boldsymbol{AV}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}+\\ \varepsilon\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}\boldsymbol{V}$$

*表示矩阵中的对称元素，此时状态反馈控制器为 $\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{YV}^{-1}$，$\Delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1$，为加法式摄动.

证明 由 Schur 补定理[7]可知，式(9)等价于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1\\ * & -\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}+\varepsilon^{-1}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{GV} & 0 & 0\\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0\\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{GV} & 0 & 0\\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0\\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}<0$$

可以转化为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2 & \boldsymbol{B}_1 \\ * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ * & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\varepsilon^{-1}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

其中 $\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}$，代入后进一步转化为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2 & \boldsymbol{B}_1 \\ * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} +$$

$$\varepsilon^{-1}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

由引理 3 可知

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2 & \boldsymbol{B}_1 \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & 0 & 0 & 0 \\ * & \boldsymbol{F}_1 & 0 & 0 \\ * & * & \boldsymbol{F}_1 & 0 \\ * & * & * & \boldsymbol{F}_{C_1}{}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & 0 & 0 & 0 \\ * & \boldsymbol{F}_1 & 0 & 0 \\ * & * & \boldsymbol{F}_1 & 0 \\ * & * & * & \boldsymbol{F}_{C_1}{}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} < 0$$

简化得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 + \Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1 \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

取 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{-1}$，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X}^{-1}$，式(10)等价于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{C}_1{}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1 \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}_3 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{-1} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{-1} + \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} + \Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{-1} + \boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{-1} + \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}$$

用矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ 分别左乘和右乘式(11)的左端，得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_K + \boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{C}_{K1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1 \\ * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0$$

由引理 1 得，式(1)系统在具有式(3)加法式摄动的式(2)状态反馈控制器作用下，闭环系统是容许的，且

满足$\left\|\boldsymbol{T}_{z_\infty\omega}\right\|_\infty<\gamma$.

式(1)系统在具有式(4)乘法式摄动的式(2)状态反馈控制器作用下，闭环系统是容许的，且满足$\left\|\boldsymbol{T}_{z_\infty\omega}\right\|_\infty<\gamma$的充要条件也可用与定理 1 类似的证明方法得到.

由引理 2，当式(1)系统在状态反馈控制器具有加性摄动时，定理 2 研究了式(5)闭环系统的从ω到z_2的闭环传递函数的H_2范数最小的充分条件.

定理 2 如果存在矩阵$\boldsymbol{V}\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{q\times n},\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{m\times m}$及$\varepsilon>0$使得如下的矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_3 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & -\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{C_2} \\ * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}V & \boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{B}} \\ \bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}+\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}+ \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}\boldsymbol{V}$$

* 表示矩阵中对称元素，$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_1$，使得$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1),\ \boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{M}_{C_2}\boldsymbol{F}_{C_2}\boldsymbol{G}_{C_2}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1))$是严格真的，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$使得$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1))$有第一种受限等价形式[5]，则式(1)系统是容许的，且$\left\|\boldsymbol{T}_{z_2\omega}\right\|_2^2<trace(\boldsymbol{W})$，此时状态反馈控制器为$\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}$，$\Delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1$，为加法式摄动.

证明　由 Schur 补定理[5]可知，式(12)等价于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_4 \\ * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}+ \frac{1}{\varepsilon}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_2} \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

其中$\boldsymbol{Z}_4=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}$.

由引理 3 知，式(14)等价于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_4 \\ * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & 0 & 0 & 0 \\ * & \boldsymbol{F}_1 & 0 & 0 \\ * & * & \boldsymbol{F}_1 & 0 \\ * & * & * & \boldsymbol{F}_{C_2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}+ \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & 0 & 0 & 0 \\ * & \boldsymbol{F}_1 & 0 & 0 \\ * & * & \boldsymbol{F}_1 & 0 \\ * & * & * & \boldsymbol{F}_{C_2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{V} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{C_2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}<0$$

简化得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}+\Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{V} & \boldsymbol{Z}_4+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} \\ * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

取$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{-1}$，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{X}^{-1}$，式(15)等价于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_5 & \boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} \\ * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_5=\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}+\Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{B}_2\Delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{-1}$

用矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$分别左乘和右乘式(16)的左端，得到$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_K & \boldsymbol{C}_{K2}^{\mathrm{T}}\\ * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0$

用矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$分别左乘和右乘式(13)的左端，则式(13)等价于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{B}}\\ \bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}\geqslant 0$$

由引理2知：式(1)系统在具有式(3)加法式摄动的式(2)状态反馈控制器的作用下，闭环系统是容许的，且$\left\|\boldsymbol{T}_{z_2\omega}\right\|_2^2<trace(\boldsymbol{W})$. 式(1)系统在具有式(4)乘法式摄动的式(2)状态反馈控制器作用下，闭环系统是容许的，且满足$\left\|\boldsymbol{T}_{z_2\omega}\right\|_2^2<trace(\boldsymbol{W})$的充分条件，也可用定理2类似的证明方法得到.

将定理1与定理2分别在加性摄动和乘性摄动情况下的结果结合在一起，得到如下定理3及定理4.

定理3　考虑式(1)系统，对给定的常数$\gamma>0$，如果存在矩阵$\boldsymbol{V}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{q\times n}$，$\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{m\times m}$及$\varepsilon>0$，使得如下的线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_5 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & -\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_6 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & -\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}\\ * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\boldsymbol{V} & \boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{B}}\\ \bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{W}\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_5=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}+\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}\right)^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_1}\boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{H}_6=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{C_2}\boldsymbol{V}$$

*表示矩阵中对称元素，$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_1$，使得$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1),\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{M}_{C_2}\boldsymbol{F}_{C_2}\boldsymbol{G}_{C_2}+D(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1))$是严格真的，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$使得$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1))$有第一种受限等价形式，则式(1)系统存在式(3)的非脆弱混合H_2/H_∞状态反馈控制器增益；此时非脆弱混合H_2/H_∞状态反馈控制器的形式为$\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V}^{-1}$，$\Delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{G}_1$，从而使得$\left\|\boldsymbol{T}_{z_\infty\omega}\right\|_\infty<\gamma$，$\left\|\boldsymbol{T}_{z_2\omega}\right\|_2^2<trace(\boldsymbol{W})$.

定理4　考虑式(1)系统，对给定的常数$\gamma>0$，如果存在矩阵$\boldsymbol{V}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{R}^{q\times n}$,$\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$及$\delta>0$，使得如下的线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_7 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}} & 0\\ * & -\boldsymbol{I}+\delta\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{M}_{C_1}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\delta\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\delta\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\delta\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\delta\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} H_8 & V^{\mathrm T}C_2^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}D_2^{\mathrm T} & V^{\mathrm T}G^{\mathrm T} & V^{\mathrm T}G_2^{\mathrm T} & V^{\mathrm T}G_2^{\mathrm T} & 0 \\ * & -I+\delta D_2M_2M_2^{\mathrm T}D_2^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & M_{C_2} \\ * & * & -\delta I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\delta I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\delta I \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} EV & E\bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm T}E^{\mathrm T} & W \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{22}$$

其中

$$H_7 = AV + B_2Y + (AV + B_2Y)^{\mathrm T} + \delta MM^{\mathrm T} + \delta B_2M_2M_2^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} + \delta V^{\mathrm T}G_{C_1}^{\mathrm T}G_{C_1}V$$

$$H_8 = AV + B_2Y + (AV + B_2Y)^{\mathrm T} + \delta MM^{\mathrm T} + \delta B_2M_2M_2^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} + \delta V^{\mathrm T}G_{C_2}^{\mathrm T}G_{C_2}V$$

$*$表示矩阵中对称元素，$\bar{B} = QPB_1$，使得 $(E, A + MFG + B_2(YV^{-1} + M_2F_2G_2YV^{-1}), B_1, C_2 + M_{C_2}F_{C_2}G_{C_2} + D(YV^{-1} + M_2F_2G_2YV^{-1}))$ 是严格真的，P和Q 使得 $(E,\ A + \ MFG + B_2(YV^{-1} + M_2F_2G_2YV^{-1}))$ 有第一种受限等价形式，则式(1)系统存在式(4)的非脆弱混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器增益；此时非脆弱混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的形式为 $u(t) = (K + \Delta K)x(t)$，$K = YV^{-1}$，$\Delta K = M_2F_2G_2K$．从而使得 $\|T_{z_\infty\omega}\|_\infty < \gamma$，$\|T_{z_2\omega}\|_2^2 < trace\,(W)$.

3 结　语

本文主要研究了控制器增益具有加法式摄动和乘法式摄动两种情况下，不确定广义系统非脆弱混合 H_2/H_∞ 优化控制问题，通过 LMI 方法，得到了充分条件，设计出的鲁棒非脆弱混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器，使得闭合系统在满足 H_∞ 性能的前提下极小化 H_2 范数的上界.

参考文献：

[1] Bernstein D S，Haddad W M. LQG control with an H_∞ performance bound：A Riccati equation approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，1989，34(3)：293–305.

[2] 杨冬梅，张庆灵，沙成满. 基于 *LMI* 的广义系统混合 H_2/H_∞ 优化控制[J]. 控制与决策，2003，18(3)：320–323.

[3] Yue D，Lam J. Suboptimal robust mixed H_2/H_∞ controller design for uncertain descriptor systems with distributed delays[J]. Computers & with Applications，2004，47(6/7)：1041–1055.

[4] Xiang Z，Chen Q，Hu W. Robust mixed H_2/H_∞ control for uncertain singular systems with state delay[J]. Control and Intelligent Systems，2006，34(2)：119–124.

[5] 杨冬梅，张庆灵. 广义系统[M]. 北京：科学出版社，2004.

[6] 俞立. 鲁棒控制：线性不等式处理方法[M]. 北京：清华大学出版社，2002.

[7] 王德进. H_2 和 H_∞ 优化控制理论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2001.