第 26 卷 第 2 期
2011 年 4 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.26 No. 2
Apr. 2011

# 关于实对称带状矩阵逆特征值问题的广义 Lanczos 算法

李杰红
（天津科技大学理学院，天津 300457）

**摘　要**：针对实对称带状矩阵的逆特征值问题,提出了一种新的能适应重特征值逆问题算法——广义 Lanczos 算法. 它是在块 Lanczos 算法、拟 Lanczos 算法的基础上的进一步扩张,通过实际计算验证,该算法简单且数值稳定.

**关键词**：特征值；逆问题；Lanczos 算法

**中图分类号**：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6510（2011）02-0075-04

# On the Generalized Lanczos Algorithm of Inverse Problem for Real Symmetric Band Matrix

LI Jie-hong
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

**Abstract**：A new algorithm was generalized by Lanczos algorithm on the real symmetric band matrix of inverse problem. The generalized Lanczos algorithm can apply to multiple eigenvalue inverse problem. It is increased by block-Lanczos algorithm and quasi-Lanczos. Numerical results shows that the algorithm is simple and stable.

**Keywords**：eigenvalue；inverse problem；Lanczos algorithm

关于实对称带状矩阵的逆特征值问题,1977 年,Boleg 和 Golub[1]提出了块 Lanczos 算法;1979 年,Friedland[2]讨论了一般实对称矩阵反问题的存在性,并给出了一种递推算法;1986 年,殷庆祥[3]提出了一种拟 Lanczos 算法,改进了块 Lanczos 算法. 对于实对称带状矩阵的逆特征值问题在文献[4–5]中有详尽的介绍,文献[6]对 $p=2$ 的情况求解了带状矩阵的逆特征值问题. 为了克服块 Lanczos 算法和拟 Lanczos 算法的缺陷,本文针对带宽为任意情况下的带状矩阵逆特征值提出了一种新的算法——广义 Lanczos 算法. 该算法取消了块 Lanczos 算法的第二个要求.

**问题**　设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ ,而对于 $|i-j|>p$ 时有 $a_{ij}=0$ ,称 $\boldsymbol{A}$ 为实对称带状矩阵[3], $p$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的半带宽. 以 $\boldsymbol{A}(k)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶到顺序主子矩阵. $\boldsymbol{A}(k)=\left(a_{ij}\right)_{i,j=k}^{n}$ ,给定实数列 $\left\{\lambda_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n-k+1}$ , $k=1,2,\cdots,p+1$ ,满足

$$\lambda_i^{(k)}\leqslant\lambda_i^{(k+1)}\leqslant\lambda_{i+1}^{(k)} \tag{I}$$

或者

$$\lambda_i^{(k)}<\lambda_i^{(k+1)}<\lambda_{i+1}^{(k)} \tag{II}$$

$$i=1,2,\cdots,n-k+1,\ k=1,2,\cdots,p+1$$

求实对称带状矩阵 $\boldsymbol{A}$ ,使 $\boldsymbol{A}(k)$ 具有特征值 $\left\{\lambda_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n-k+1}$ , $k=1,2,\cdots,p+1$ .

用广义 Lanczos 算法求解实对称矩阵的逆特征值问题可以分为以下两步:(1)由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $p+1$ 个有关的顺序主子矩阵的特征值来计算所求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准化了的特征向量的前 $p+1$ 个分量;(2)用拟 Lanczos 算法产生一个实对称带状矩阵 $\boldsymbol{A}$ . 本文主要讨论第一步.

**引理 1**　设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & b^{\mathrm{T}} \\ b & \Lambda_2 \end{bmatrix}$ ,其中 $b^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})$ , $\Lambda_2=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_{n-1}^2\right)$ ,则可以确定 $b_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 和 $a_{11}$ ,使矩阵 $\boldsymbol{B}$ 具有特征值 $\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}$ .

**证明**　若 $\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(2)}$ 互异,则

$$\det(\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\det\left[\mu\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix} a_{11} & b^{\mathrm{T}} \\ b & \Lambda_2 \end{bmatrix}\right]=$$

**收稿日期**：2010–09–07；**修回日期**：2010–11–22

**作者简介**：李杰红（1970—），女，河北沧州人，副教授，tjkjdxljh@163.com.

$$\det\begin{bmatrix}\mu-a_{11} & -b^{\mathrm T}\\ -b & \mu\boldsymbol{I}_{n-1}-\Lambda_2\end{bmatrix}$$

把上式展开得

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\mu-\lambda_j^{(1)}\right)=\left(\mu-a_{11}\right)\prod_{j=1}^{n-1}(\mu-\lambda_j^{(2)})-\sum_{k=1}^{n-1}b_k^2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\mu-\lambda_j^{(2)}) \tag{1}$$

令 $\mu=\lambda_k^{(2)},k=1,2,\cdots,n-1$ 得

$$\prod_{j=1}^{n}(\lambda_k^{(2)}-\lambda_j^{(1)})=-b_k^2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\lambda_k^{(2)}-\lambda_j^{(2)})$$

故，

$$b_k^2=-\prod_{j=1}^{n}(\lambda_k^{(2)}-\lambda_j^{(1)})\Big/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-1}(\lambda_k^{(2)}-\lambda_j^{(2)}) \tag{2}$$

同时，在式(1)中，比较 $\mu^{n-1}$ 的系数得

$$a_{11}=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j^{(2)} \tag{3}$$

若 $\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(2)}$ 之中有相同的，则可先进行降阶处理. 为不失一般性，可假设

$$\lambda_m^{(2)}=\lambda_{m+1}^{(2)}=\cdots=\lambda_{n-1}^{(2)},\ m\geqslant 1$$

由隔离条件(I)有

$$\lambda_m^{(2)}=\lambda_{m+1}^{(1)}=\cdots=\lambda_{n-1}^{(1)}=\lambda_{n-1}^{(2)}$$

此时，可令 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_{n-1}=0$，则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\\ b_1 & \lambda_1^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_2 & 0 & \lambda_2^{(2)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_m & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^{(2)} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}_{(m+1)\times(n-m)}\\ \boldsymbol{O}_{(n-m)\times(m+1)} & \boldsymbol{D}_{n-m-1}\end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{O}_{(m+1)\times(n-m)}$与$\boldsymbol{O}_{(n-m)\times(m+1)}$ 是两个零矩阵，$\boldsymbol{D}_{n-m-1}=\mathrm{diag}(\lambda_{m+1}^{(2)},\lambda_{m+2}^{(2)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(2)})$

若此时 $\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_m^{(2)}$ 已经互异，则只须由 $\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_m^{(1)},\lambda_n^{(1)}$ 确定 $b_1,b_2,\cdots,b_m,a_{11}$，使得矩阵 $\boldsymbol{C}$ 具有特征值 $\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_m^{(1)},\lambda_n^{(1)}$ 便可，若 $\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_m^{(2)}$ 还有相同的，则继续上述过程便可. 证毕.

**引理 2**　设 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)})$，其中 $\boldsymbol{B}$ 同引理 1，$b_k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 由式(2)确定，$\boldsymbol{X}$ 是由 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量构成的矩阵，且 $\boldsymbol{X}$ 的列两两正交，如果 $\left\{\lambda_i^{(1)}\right\}_1^n$ 和 $\left\{\lambda_i^{(2)}\right\}_1^n$ 满足隔离条件(II)，则可取

$$x_{1j}=1,j=1,2\cdots,n-1 \tag{4}$$

$$x_{k+1j}=\frac{b_k}{\lambda_j^{(1)}-\lambda_k^{(2)}},j=1,2\cdots,n,k=1,2,\cdots,n-1 \tag{5}$$

$x_{ij}$ 表示 $X$ 的 $(i,j)$ 位置元素，若 $\lambda_j^{(1)}=\lambda_k^{(2)}$，则对应于 $\lambda_j^{(1)}$ 的特征向量取为 $\boldsymbol{e}_{k+1}$，同时将 $\boldsymbol{X}$ 的第 $k+1$ 行当中其余元素写成 0.

注：在证明该引理之前，先说明一种情形，实际上引理中 $\lambda_j^{(1)}=\lambda_k^{(2)}$ 只是说明 $j=k$ 的情况，对于 $j\neq k$，则对应 $\lambda_{j+1}^{(1)}$ 的特征向量可取为 $\boldsymbol{e}_{k+2}$，同时将 $\boldsymbol{X}$ 的第 $k+2$ 行其余元素取为 0，对于 $\lambda_{j+2}^{(1)}\cdots$ 可依次类推，这可以从以下的证明中看出.

**证明**　设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{x}_j=\left(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj}\right)^{\mathrm T}$ 为对应 $\lambda_j^{(1)}$ 的特征向量 $(j=1,2,\cdots,n)$，那么由

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}\left(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}\right)$$

得到 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_j=\lambda_j^{(1)}\boldsymbol{x}_j$，$(j=1,2,\cdots,n)$

将上式展开得

$$\begin{cases}b_1x_{1j}+\lambda_1^{(2)}x_{2j}=\lambda_j^{(1)}x_{2j}\\ \cdots\cdots\\ b_kx_{1j}+\lambda_k^{(2)}x_{k+1j}=\lambda_j^{(1)}x_{k+1j}\\ b_{k+1}x_{1j}+\lambda_{k+1}^{(2)}x_{k+2j}=\lambda_j^{(1)}x_{k+2j}\\ \cdots\cdots\\ b_{n-1}x_{1j}+\lambda_j^{(2)}x_{nj}=\lambda_j^{(1)}x_{nj}\\ a_{11}x_{1j}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_kx_{k+1j}=\lambda_j^{(1)}x_{1j}\end{cases},j=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

整理得

$$x_{k+1j}=\frac{b_k}{\lambda_j^{(1)}-\lambda_k^{(2)}}x_{1j} \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k^2}{\lambda_j^{(1)}-\lambda_k^{(2)}}+a_{11}=\lambda_j^{(1)} \tag{8}$$

从式(6)可知 $x_{1j}\neq 0$，故可令 $x_{1j}=1$，得

$$x_{k+1j}=b_k\big/(\lambda_j^{(2)}-\lambda_k^{(2)}),k=1,2,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,n$$

从而式(4)、(5)得证，对于由式(4)、(5)确定的 $\boldsymbol{X}$，其列两两正交，这是显然的，在条件(II)下且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm T}$，则有 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{x}_j=0(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$.

当 $\lambda_j^{(1)}=\lambda_k^{(2)}$ 时，由式(6)可取

$$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{e}_{k+1}=\left(0,\cdots,0,\overset{k+1}{1},0,\cdots,0\right)^{\mathrm T}$$

显然 $\boldsymbol{x}_j$ 是 $\lambda_j^{(1)}$ 所对应的特征向量，但是这样取得的 $\boldsymbol{x}_j$ 不一定满足正交关系，为了使其满足则必有

$x_{k+1i}=0(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$

但从式(2)知，当 $\lambda_j^{(1)}=\lambda_k^{(2)}$ 时，$b_k=0$，又由式(6)知，此时由式(4)和(5)求的 $\boldsymbol{x}_j$ 仍是 $\lambda_j^{(1)}$ 所对应的特征向量.

当 $k\neq j$ 时，由式(6)知，$\lambda_{j+1}^{(1)}$ 对应特征向量可取 $\boldsymbol{x}_{j+1}=\left(0,\cdots,0,\overset{k+1}{1},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_{j+2}^{(1)}\cdots$ 对应的特征向量可依次取得. 证毕.

**引理 3**　设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ 为实对称矩阵，具有特征值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}^{(2)}=\left(a_{ij}\right)_{i,j=2}^{n}$ 具有特征值 $\{\mu_i\}_{i=1}^{n-1}$，如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，其中 $\Lambda=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$，$\boldsymbol{Q}=\left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ 且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$，则

$$q_{1j}^2=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mu_k-\lambda_j\right)/\prod_{k=1,k\neq j}^{n}\left(\lambda_k-\lambda_j\right)\tag{9}$$

**证明**　先考虑 $\boldsymbol{A}$ 无重特征值的情形：对 $\lambda\neq\lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})&=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\\&\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\\&\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\left[Q(\lambda\boldsymbol{I}-\Lambda)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}=\\&\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda\boldsymbol{I}-\Lambda)^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

比较上式两边(1,1)位置上的元素，有

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I}^{(2)}-\boldsymbol{A}^{(2)}\right)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\sum_{j=1}^{n}q_{1j}^2/\left(\lambda-\lambda_j\right)$$

即，

$$\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda-\mu_k)=\sum_{j=1}^{n}q_{1j}^2\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}(\lambda-\mu_k)$$

上式两边都是关于 $\lambda$ 的 $n-1$ 次特征多项式，对一切 $\lambda\neq\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$ 均成立，因而为恒等式，故令 $\lambda=\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$，得 $\prod_{k=1}^{n}\left(\mu_k-\lambda_j\right)=q_{1j}^2\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\lambda_k-\lambda_j\right)$，$q_{1j}^2=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\mu_k-\lambda_j\right)$. 于是式(9)得证.

其次，考虑 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值的情形，此时可以对 $\boldsymbol{A}$ 进行降阶处理.

为不失一般性，假设 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m$，由隔离条件(I)，亦即 $\lambda_i\leqslant\mu_i\leqslant\lambda_{i+1}$ 得，

$$\lambda_1=\mu_1=\lambda_2=\mu_2=\cdots=\mu_{m-1}=\lambda_m$$

由于 $\lambda_m$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $m$ 重特征值，根据高等代数理论可知，$\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_m$ 的特征向量空间为 $m$ 维，因此，可以得特征子空间 $V_{\lambda m}$ 如下形式的一组基向量：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=(0,0,0,\cdots0,1,*\cdots*)^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{x}_2=(0,0,0,\cdots1,0,*\cdots*)^{\mathrm{T}}\\\qquad\cdots\cdots\\\boldsymbol{x}_{m-1}=(0,1,0,\cdots0,0,*\cdots*)^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{x}_m=(1,0,0,\cdots0,0,*\cdots*)^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

然后，对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 施行施密特正交化过程所得到结果记为 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_m$，显然 $\boldsymbol{q}_j(j=1,2,\cdots,m-1)$ 的第一个分量为

$$q_{1j}=0\ \ (j=1,2,\cdots,m-1)\tag{10}$$

最后由 $\{\lambda_i\}_{i=m}^{n}$ 和 $\{\mu_i\}_{i=m}^{n-1}$ 及式(8)计算出 $q_{1j}^2(j=m,\cdots,n)$. 如果此时 $\{\lambda_i\}_{i=m+1}^{n}$ 中还有重特征值，则继续按照上述方法处理，因此引理 3 得证.

**定理 1**　设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ 为实对称矩阵，记 $\boldsymbol{A}(k)=\left(a_{ij}\right)_{i,j=k}^{n}$ 且 $\boldsymbol{A}(k)$ 具有特征值 $\left\{\lambda_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n-k+1}$，$k=1,2,\cdots,p+1$，满足 $\lambda_i^k\leqslant\lambda_i^{(k+1)}\leqslant\lambda_{i+1}^{(k)}$，$k=1,2,\cdots,p$，$i=1,2,\cdots,n-k$，$\Lambda=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}\right)$，又设 $\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{Q}=\left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ 且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 的前 $p$ 行可由 $\left\{\lambda_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n-k+1}$ $(k=1,2,\cdots,p+1)$ 计算得出.

**证明**　对 $p$ 采用归纳法

(1) 当 $p=1$ 时，即为引理 3 之情形，此时 $q_{1j}$ 的计算公式由式(9)、(10)给出；

(2) 现设 $p<r<n$ 时，定理结论成立，并设 $\boldsymbol{A}^{(2)}=\boldsymbol{Q}_2\Lambda_2\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{I}_{n-1}$，$\Lambda_2=\operatorname{diag}(\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(2)})$，则由归纳假设 $q_{ij}^{(2)}(i=1,2,\cdots,r-1,j=1,2\ \cdots,n-1)$ 已算出.

设

$$\begin{bmatrix}1&\\&\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&\\&\boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&b^{\mathrm{T}}\\b&\Lambda_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\tag{11}$$

其中，$b^{\mathrm{T}}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}\right)=\left(a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}\right)\boldsymbol{Q}_2$，则由引理 1 知，可以确定 $b_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 和 $a_{11}$，使 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}$. 即由引理 1 求 $b_k$和$a_{11}$ 为

$$b_k=-\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_k^{(2)}-\lambda_j^{(1)}\right)/\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n-1}\left(\lambda_k^{(2)}-\lambda_j^{(2)}\right),k=1,2,\cdots,n-1$$

$$a_{11}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(1)}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2)}$$

设 $\boldsymbol{X}$ 是由 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量所形成之矩阵，且有 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\operatorname{diag}\left(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_n^{(1)}\right)$，则由引理 2，可求出

$$x_{1j}=1(j=1,2,\cdots,n)$$

$$x_{k+1,j}=b_k/\left(\lambda_j^{(1)}-\lambda_k^{(2)}\right)(j=1,2,\cdots,n,k=1,2,\cdots,n-1)$$

若 $\lambda_j^{(1)}-\lambda_k^{(2)}$，则对应于 $\lambda_j^{(1)}$ 的特征向量取为 $\boldsymbol{e}_{k+1}$，同时，将 $\boldsymbol{X}$ 的第 $k+1$ 行当中其余的元素记为 0，将 $\boldsymbol{X}$ 的列向量单位化后所得出正交矩阵记作 $\bar{\boldsymbol{Q}}$，则由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{Q}}\Lambda\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & \\ & Q_2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{Q}}$$

因此

$$q_{1j}=\bar{q}_{1j},q_{ij}=\sum_{k=1}^{n-1}q_{i-1,k}^{(2)}q_{k+1,k}\ (i=2,3,\cdots,r,j=1,2,\cdots,n)$$

于是由归纳原理知，对于 $p,1\leqslant p\leqslant n$ 时定理结论成立．证毕．

**参考文献：**


［1］ Boley D，Golub G H. Inverse eigenvalue problems for band matrices［M］. New York：Spring Verlag Press，1977.

［2］ Friedland S. The reconstruction of a symmetric matrix from the spectral data［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1979，71（2）：412–422.

［3］ 殷庆祥．实对称带状矩阵特征值反问题的拟 Lanczos 算法及应用［C］//第一届逆特征值会议资料．西安：中国数学会计算数学学会，1986.

［4］ 周树荃，戴华．代数特征值反问题［M］．郑州：河南科学技术出版社，1991：195–201.

［5］ 程云鹏．矩阵论［M］．西安：西北工业大学出版社，1996：262–273.

［6］ 王正盛．实对称五对角矩阵逆特征值问题［J］．高等学校计算数学学报，2002，24（4）：366–376.


（上接第 23 页）

**参考文献：**


［1］ 付敏．蚕沙低甲氧基果胶提取工艺的研究［D］．成都：四川大学，2004.

［2］ 高彦祥，方政．柑橘类果汁加工副产品综合利用研究进展［J］．饮料工业，2005，8（1）：1–7.

［3］ 王文娟．柑橘渣的综合利用［J］．中国饲料，2004（14）：30–33.

［4］ Saucedo-Pompa S，Rojas-Molina R，Aguilera-Carbó A F，et al. Edible film based on candelilla wax to improve the shelf life and quality of avocado ［J］. Food Research International，2009，42（4）：511–515.

［5］ Sousa A M M，Sereno A M，Hilliou L，et al. Biodegradable agar extracted from *Gracilaria Vermiculophylla*：Film properties and application to edible coating ［J］. Materials Science Forum，2010，636：739–744.

［6］ Pérez C D，Flores S K，Marangoni A G，el al. Development of a high methoxyl pectin edible film for retention of *L*-（+）-ascorbic acid ［J］. Journal of Agricultural and Food Chemistry，2009，57（15）：6844–6855.

［7］ 谭惠子，刘成梅，吴伟，等．大豆膳食纤维可食用膜的研制［J］．食品科学，2009，30（8）：303–306.

［8］ 单成俊．大米蛋白可食用膜成膜机理及应用研究［D］．无锡：江南大学，2005.

［9］ 储君，王海鸥．乙醇沉淀法提取柚皮果胶的工艺研究［J］．安徽农业科学，2008，36（18）：7526–7528.

［10］ 徐金瑞，刘兴华，任亚梅．苹果渣中果胶的盐析工艺研究［J］．中国食品学报，2006，6（6）：95–99.

［11］ 苏艳玲，郝更新，赵红梅．纤维素酶法提取柑橘皮果胶［J］．晋中学院学报，2009，26（3）：68–70.

［12］ 董越欣，陈爽，黄国林．微波法从橘子皮中提取果胶的工艺研究［J］．化工时刊，2008，22（9）：1–4.

［13］ 雷激，马力，李中柱，等．酶法制备低甲氧基果胶的工艺研究［J］．食品工业科技，2007，28（2）：211–216.

［14］ 邱礼平，姜录，姚玉静，等．香蕉皮果胶萃取及果胶保鲜膜制备的研究［J］．食品科学，2009，30（8）：106–110.

［15］ 陈雪，邹锁柱，曾荣妹，用普鲁兰酶改进淀粉膜质量的研究［J］．食品工业科技，2002，23（10）：20–22.