第 32 卷 第 2 期
2017 年 4 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol. 32 No. 2
Apr. 2017

DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20160120

Euler-Bernoulli 梁系统的局部分数阶反馈镇定

王 雷[1]，解雅茹[2]
（1. 天津理工大学理学院，天津 300384；2. 天津大学理学院，天津 300072）

摘 要：对 Euler-Bernoulli 梁的稳定性进行研究，首先在系统内部设计了局部分数阶反馈控制器，通过非线性算子半群理论得到了闭环系统的适应性；然后通过选取适当的乘子，借用乘子技巧得到了系统的指数稳定性与多项式稳定性，并给出了系统能量的衰减性估计；最后通过数值模拟验证了局部分数阶反馈控制器的有效性.

关键词：Euler-Bernoulli 梁；分数阶；局部反馈控制；半群理论

中图分类号：O231.4；O177.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6510（2017）02-0073-06

Stabilizing Euler-Bernoulli Beam System Using Local Fractional Order Feedback

WANG Lei[1]，XIE Yaru[2]
（1. School of Science，Tianjin University of Technology，Tianjin 300384，China；
2. School of Science，Tianjin University，Tianjin 300072，China）

Abstract：In this research，the stability of Euler-Bernoulli beam system was studied. Firstly，a local fractional order feedback controller was designed，and the well-posedness of the closed-loop system was proved by nonlinear operator semigroup theory. Secondly，by choosing an appropriate multiplier，the stability of exponential and polynomials was achieved，and the decay rate of the system energy was estimated. Finally，numerical simulations were employed to prove the effectiveness of the local fractional order feedback controller.

Key words：Euler-Bernoulli beam；fractional order；local feedback control；semigroup theory

近 30 年来，随着材料技术的蓬勃发展，大量弹性材料被应用于航空航天、船舶、机械、建筑等领域. 基于工程应用的需要，工程技术人员、数学学者对其进行研究，内容涉及弹性系统的动力学行为、控制器设计、系统的稳定性等. Euler-Bernoulli 梁作为一种基本的弹性结构被广泛研究. 如文献[1]对变系数 Euler-Bernoulli 梁进行研究，不仅分析了闭环系统的 Riesz 基性质，而且通过判定谱确定增长条件得到了系统的指数稳定性；文献[2]在 Lyapunov 函数方法的基础上设计了变结构边界输出反馈控制器，并在该控制器下得到了带有自由边界的 Euler-Bernoulli 梁系统的渐近稳定性；文献[3]对带有输入时滞的 Euler-Bernoulli 梁系统进行边界控制，通过谱分析和构造 Lyapunov 函数的方法得到了系统的渐近稳定性；文献[4]则利用滑膜控制方法及非传统控制策略的自抗扰控制（ADRC）方法对输入有外部扰动的 Euler-Bernoulli 梁进行研究，并得到了系统的稳定性. 此外，考虑到热效应对弹性系统的影响，热弹性系统也开始受到关注. 如文献[5]采用边界速度反馈，通过细致的谱分析得到了第Ⅱ类热弹性系统算子频谱为空集的一个充分条件，并从理论上证明了弹性系统在热效应下仍具有超稳定现象；文献[6]则对系列连接热弹性系统网络进行了研究，通过构造合适乘子并利用 Liu 等[7]提出的反证法技巧，证明了该类热弹性网络系统的解是指数衰减到零. 更多相关结果参见文献[8–11].

上述文献多是对系统的反馈稳定性进行研究，对

收稿日期：2016–04–07；**修回日期**：2016–06–17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61573252）
作者简介：王 雷（1982— ），男，河北人，讲师，wangleianguo@163.com
数字出版日期：2017–01–12；**数字出版网址**：http://www.cnki.net/kcms/detail/12.1355.N.20170112.1202.008.html

系统局部非线性反馈的研究却少之又少. 因此，本文以 Euler-Bernoulli 梁系统为研究对象，通过设计局部非线性分数阶反馈控制器镇定网络.

1　系统模型

描述系统的偏微分方程为

$$u_{tt}(x,t)+u''''(x,t)+b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)=0$$
$$0<x<l\ ,\ t>0$$

式中：l 为 Euler-Bernoulli 梁长度；$u(x,t)$ 表示 Euler-Bernoulli 梁离开平衡位置的位移；′表示为对空间变量 x 的导数；u_t 及 u_{tt} 表示对时间变量的一阶导数与二阶导数.

假设系统在边界满足初边值条件

$$\begin{cases} u(0,t)=u'(0,t)=0 & t>0 \\ u''(l,t)=u'''(l,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x) & 0<x<l \end{cases}$$

在系统的内部设计局部分数阶反馈控制器 $b(x)\rho^{\frac{1}{2}}\left(u_t(x,t)\right)$，其中 $b(x)$ 满足

$$\begin{cases} b(x)=1 & x\in[\alpha,l) \\ b(x)=0 & x\in[0,l]\setminus[\alpha,l) \end{cases}$$

式中：$\alpha\in(0,l)$ 为某正常数；$\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)$ 为系统非线性分数阶反馈，且满足 $\rho^{\frac{1}{2}}(0)=0$ 的 C^1 – 类不减函数，同时要求 $u_t\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\geqslant 0$.

从而得到 Euler-Bernoulli 梁闭环系统：

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)+u''''(x,t)+b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)=0 & 0<x<l \\ u(0,t)=u'(0,t)=0 & t>0 \\ u''(l,t)=u'''(l,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x) & 0<x<l \end{cases} \tag{1}$$

2　系统的适定性

首先，将系统（1）写成抽象发展方程形式. 令

$$V^k(0,l)=\{f\in H^k(0,l)\,|\,f(0)=0,f'(0)=0\}$$
$$k=1,2,3,\cdots$$

其中 $H^k(0,l)$ 为 k 阶的 Sobolev 空间. 选择系统的状态空间为 $H=V^2[0,l]\times L^2[0,l]$，对于任意 $\boldsymbol{Y}_1=(f,g)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Y}_2=(u,z)^{\mathrm{T}}\in H$，定义空间 H 上的内积为

$$<\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2>_H=\int_0^l f''(x)u''(x)\mathrm{d}x+\int_0^l g(x)z(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

它具有范数 $\|(f,g)^{\mathrm{T}}\|_H^2=\int_0^l f''^2(x)\mathrm{d}x+\int_0^l g^2(x)\mathrm{d}x$，其中上标“T”表示向量的转置. 易证，$(H,\|\cdot\|_H)$ 是一个 Hilbert 空间.

在空间 H 中，定义系统算子 A 为

$$A(u,z)^{\mathrm{T}}=(z,-u''''-b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(u_t))^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$\forall(u,z)^{\mathrm{T}}\in D(A)$，其中

$$D(A)=\{(f,g)^{\mathrm{T}}\in V^4(0,l)\times V^2(0,l)\,|\,f'''(l)=f''(l)=0\} \tag{4}$$

因此，系统（1）可表示为空间 H 中的一个抽象发展方程形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{U}(t) & t>0 \\ \boldsymbol{U}(t)=\left(u(x,t),u_t(x,t)\right)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{U}_0=(u_0(x),u_1(x))^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5}$$

定理 1 设 H 与 A 如前定义，则系统算子 A 是 H 上的一个极大耗散算子.

证明：该定理需要证明算子的极大性和单调性.

（1）单调性

对于任意的 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2\in D(A)$，由分部积分可得

$$\begin{aligned} &<A\boldsymbol{Y}_1-A\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2>_H= \\ &\int_0^l(z_1-z_2)''(u_1-u_2)''\mathrm{d}x-\int_0^l(u_1-u_2)''''(z_1-z_2)\mathrm{d}x- \\ &\int_0^l b(x)(z_1-z_2)(\rho^{\frac{1}{2}}(z_1)-\rho^{\frac{1}{2}}(z_2))\mathrm{d}x= \\ &\int_0^l(z_1-z_2)''(u_1-u_2)''\mathrm{d}x+(z_1-z_2)(u_1-u_2)''|_0^l- \\ &\int_0^l(z_1-z_2)''(u_1-u_2)''\mathrm{d}x- \\ &\int_0^l b(x)(z_1-z_2)(\rho^{\frac{1}{2}}(z_1)-\rho^{\frac{1}{2}}(z_2))\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由于 $\rho^{\frac{1}{2}}(z)$ 为不减函数，故有 $(z_1-z_2)(\rho^{\frac{1}{2}}(z_1)-\rho^{\frac{1}{2}}(z_2))\geqslant 0$. 因此得到 $<A\boldsymbol{Y}_1-A\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2>_H\leqslant 0$，表明 $-A$ 是单调的.

（2）极大性

由极大算子定义，仅需证明 $R(I-A)=H$.

对于 $\forall(f,g)^{\mathrm{T}}\in H$，考虑方程 $(I-A)(u,z)^{\mathrm{T}}=(f,g)^{\mathrm{T}}$，即

$$\begin{cases} u-z=f \\ z-(-u''''-b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(z))=g \end{cases} \tag{6}$$

注意 $H_E^2(0,l)$ 为实 Hilbert 空间，且内积满足

$$<v,\phi_2>_{H_0^2(0,l)}=\int_0^l v''(x)\phi''(x)\mathrm{d}x$$

相应的范数为

$$\|\phi\|^2_{H_0^2(0,l)}=\int_0^l|\phi''|^2\,\mathrm{d}x$$

用 $\forall v\in H_E^2(0,l)$ 乘以式(6)中第二式的两边，有

$$\begin{aligned}&\int_0^l g(x)v(x)\mathrm{d}x=\\&\int_0^l z(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_0^l u''''(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_0^l b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(z)v(x)\mathrm{d}x=\\&\int_0^l z(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_0^l u''(x)v''(x)\mathrm{d}x+\int_0^l b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(z)v(x)\mathrm{d}x=\\&\int_0^l u(x)v(x)\mathrm{d}x-\int_0^l f(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_0^l u''(x)v''(x)\mathrm{d}x+\\&\int_0^l b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(z)v(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{7}$$

在空间 $H_E^2(0,l)$ 上引入式(8)函数.

$$J(u)=\frac{1}{2}B(u,u)-L(u)\tag{8}$$

其中

$$B(u,u)=\int_0^l u''(x)u''(x)\mathrm{d}x+\int_0^l u^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}L(u)=&\int_0^l g(x)u(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(x)u(x)\mathrm{d}x-\\&\int_0^l b(x)\rho^{\frac{1}{2}}(z)u(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

应用 Cauchy-Schwartz 不等式，得到

$$\begin{aligned}|L(u)|^2\leqslant&(\int_0^l g^2(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f^2(x)\mathrm{d}x+\\&\int_0^l b^2(x)\rho(z)\mathrm{d}x)\int_0^l u^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\\&C_L\|u\|^2_{H^2_{E(0,l)}}\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}B(u,u)=&\int_0^l u''(x)u''(x)\mathrm{d}x+\int_0^l u^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\\&\int_0^l u''(x)u''(x)\mathrm{d}x\geqslant\|u\|^2_{H^2_{E(0,l)}}\end{aligned}$$

因此，$J(u)$ 在 $H_E^2(0,l)$ 上是强制的，从而 $J(u)$ 有唯一的极小值点满足式(7). 由变分原理可得到 $R(I-A)=H$. 定理 1 得证.

借助非线性算子半群理论(详见文献[8])，可得到定理 2 所示的适定性结论.

定理 2 假设 H 与 A 如前定义. 对于所有的 $\boldsymbol{U}_0\in H$，式(1)系统存在唯一的弱解 $\boldsymbol{U}(t)=T(t)\boldsymbol{U}_0$；更进一步，对于所有的 $\boldsymbol{U}_0\in D(A)$，式(1)系统存在唯一的强解，且 $\boldsymbol{U}(t)=T(t)\boldsymbol{U}_0$.

3　系统稳定性分析

定义系统能量函数

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l u_t^2(x,t)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l u''^2(x,t)\mathrm{d}x$$

利用边界条件及 $u_t\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\geqslant 0$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=&\int_0^l u''(x,t)u_t''(x,t)\mathrm{d}x-\int_0^l u_t(x,t)u''''(x,t)\mathrm{d}x-\\&\int_0^l b(x)u_t(x,t)\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\mathrm{d}x=\\&-\int_0^l b(x)u_t(x,t)\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\mathrm{d}x\leqslant 0\end{aligned}$$

因此，能量函数 $E(t):R_+\to R_+$ 为不增函数. 可得到以下系统稳定性的主要结果.

定理 3 假设非线性反馈 $\rho(u_t)$ 满足

$$c_1|u_t|^{2p}\leqslant\rho(u_t)\leqslant c_2|u_t|^{\frac{2}{p}}\qquad |u_t|\leqslant 1\tag{9}$$

$$c_3|u_t|^{2}\leqslant\rho(u_t)\leqslant c_4|u_t|^{2q}\qquad |u_t|\geqslant 1\tag{10}$$

其中 $c_i(i=1,2,3,4)\geqslant 0$，$p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$. 则系统能量满足如下不等式:

$$E(t)\leqslant CE(0)\mathrm{e}^{-wt}\qquad \forall t\geqslant 0,\ p=1$$

$$E(t)\leqslant CE(0)\frac{1}{(1+t)^{\frac{2}{p-1}}}\qquad \forall t\geqslant 0,\ p>1$$

这里 w，C 是两个正常数.

为证明上述定理，需要如下引理(详见文献[9]).

引理 1 设 $E(t):R_+\to R_+$ 为不增函数，并假定存在两个正常数 $p\geqslant 1$，$A>0$ 使得

$$\int_S^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(t)\mathrm{d}t\leqslant AE(S)\qquad 0\leqslant S<+\infty$$

那么

$$E(t)\leqslant E(0)\mathrm{e}^{(1-\frac{t}{\lambda})}\qquad \forall t\geqslant 0,\ p=1$$

$$E(t)\leqslant (A(1+\frac{2}{p-1}))^{\frac{2}{p-1}}\frac{1}{(1+t)^{\frac{2}{p-1}}}\qquad p>1$$

下面对定理 3 进行证明. 需要注意的是：在如下证明中出现在不同位置的 C 看作不同的正常数.

证明： 当 $(u,u_t)^{\mathrm{T}}\in D(A)$，对式(1)系统应用乘子 ηuE^{μ}，其中 μ 是一个正实数，且 η 满足 $\eta\in C^2[0,l]$，$\eta''>0$，$\eta'>0$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$，且当 $x\in(\alpha,l)$ 时，$\eta=1$；当 $x\in[0,l]\backslash(\alpha-\varepsilon,l)$ 时，$\eta=0$，其中 ε 为某个足够小的正实数.

由分部积分可得

$$0=\int_S^T\int_0^l E^\mu \eta u u_{tt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_S^T\int_0^l E^\mu \eta u''''u\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\int_S^T\int_0^l E^\mu b\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\eta u\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$[E^\mu\int_0^l \eta u u_t dx]\big|_S^T-\mu\int_S^T E^{\mu-1}E'\int_0^l \eta u u_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\int_S^T E^\mu\int_0^l \eta(u_t^2-u''^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\int_S^T E^\mu\int_0^l u''(\eta''u+2\eta'u')\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\int_S^T\int_0^l E^\mu b\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\eta u\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{11}$$

注意到 $\eta\geqslant 0$ 及 $(u,u_t)^{\mathrm{T}}\in D(A)$，由 $u_t^2-u''^2=2u_t^2-(u_t^2+u''^2)$ 可得

$$\int_S^T E^\mu\int_0^l \eta(u_t^2+u''^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$-[E^\mu\int_0^l \eta u u_t\mathrm{d}x]\big|_S^T\mathrm{d}x-2\int_S^T E^\mu\int_0^l \eta u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\mu\int_S^T E^{\mu-1}E'\int_0^l \eta u u_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\int_S^T E^\mu\int_0^l \eta u b\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\int_S^T E^\mu\int_0^l u''(\eta''u+2\eta'u')\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{12}$$

借助于 Cauchy-Schwarz 不等式及 Poincare 不等式，有

$$\left|\int_0^l \eta u u_t\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^l \eta\frac{u^2+u_t^2}{2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_0^l (u''^2+u_t^2)\mathrm{d}x\leqslant CE(t) \tag{13}$$

因此有

$$\left|E^\mu\int_0^l \eta u u_t\mathrm{d}x\right|\leqslant CE^{\mu+1}\leqslant CE^\mu(0)E(t) \tag{14}$$

利用 E' 的不增性及积分第一中值定理有

$$\left|\int_S^T E^{\mu-1}E'\int_0^l \eta u u_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant -C\int_S^T E^\mu E'\mathrm{d}t\leqslant CE(S) \tag{15}$$

和

$$\int_S^T E^\mu\int_0^l u''(\eta''u+2\eta'u')\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_S^T E^\mu[\int_0^l \eta''\frac{u''^2+u^2}{2}\mathrm{d}x+\int_0^l \eta'(u''^2+u'^2)\mathrm{d}x]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_S^T E^\mu[\int_0^l \eta''u''^2\mathrm{d}x+\int_0^l 2\eta'u''^2\mathrm{d}x]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_S^T E^\mu[\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha (\eta''+2\eta')(u''^2+u_t^2)\mathrm{d}x]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\hat{\varepsilon}\int_S^T E^{\mu+1}\mathrm{d}t \tag{16}$$

其中 $\hat{\varepsilon}$ 为某一正常数，且当 $\varepsilon\to 0$ 时，有 $\hat{\varepsilon}\to 0$.

由等式(12)及不等式(13)—(16)，式(11)可重新写为

$$(1-\hat{\varepsilon})\int_S^T E^{\mu+1}\mathrm{d}t\leqslant CE(t)+$$
$$\hat{C}\int_S^T\int_\alpha^l E^\mu(u_t^2+|u\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

即

$$\int_S^T E^{\mu+1}\mathrm{d}t\leqslant CE(t)+\frac{\hat{C}\int_S^T\int_\alpha^l E^\mu(u_t^2+|u\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{(1-\hat{\varepsilon})} \tag{17}$$

其中 $\hat{C}$ 为某一正常数.

由不等式(9)可得

$$\int_{\alpha|u_t|\leqslant 1}^l |u_t|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\alpha|u_t|\leqslant 1}^l (u_t\rho^{\frac{1}{2}}(u_t))^{\frac{2}{p+1}}\mathrm{d}x\leqslant C(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}$$

$$\int_{\alpha|u_t|\leqslant 1}^l \rho^{\frac{1}{2}}(u_t)^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\alpha|u_t|\leqslant 1}^l (u_t\rho^{\frac{1}{2}}(u_t))^{\frac{2}{p+1}}\mathrm{d}x\leqslant C(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}$$

固定任意小的 $\delta>0$，选取 $\mu=\dfrac{p-1}{2}$，这里 $p\geqslant 1$，应用 Young 不等式可得

$$E^{\frac{p-1}{2}}\int_{\alpha|u_t|\leqslant 1}^l (|u_t|^2+|u\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)|)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$CE^{\frac{p-1}{2}}(-E')^{\frac{2}{p+1}}+CE^{\frac{p}{2}}(-E')^{\frac{1}{p+1}}\leqslant\delta E^{\frac{p+1}{2}}-C(\delta)E'$$

因此

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}\int_{\alpha|u_t|\leqslant 1}^l (|u_t|^2+|u\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\delta\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\mathrm{d}t-C(\delta)E(S)$$

并将上式代入式(17)可得

$$(1-\delta)\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C_1\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\alpha|u_t|>1}^l (|u_t|^2+|u\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$C(\delta)E(S) \tag{18}$$

另一方面

$$C_1E^{\frac{p-1}{2}}\int_{\alpha|u_t|>1}^l |u_t|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\alpha|u_t|>1}^l bu_t\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\mathrm{d}x\leqslant C(-E'(t))$$

应用 Hölder 不等式、Sobolev 嵌入 $H^1(\alpha,l)\to L^{q+1}(\alpha,l)$ 及 Young 不等式，得

$$C_1E^{\frac{p-1}{2}}\int_{\alpha|u_t|>1}^l b(x)|u\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$CE^{\frac{p-1}{2}}\|u\|_{q+1}\|\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\|_{L^{\frac{q+1}{q}}}\leqslant CE^{\frac{p}{2}}\|\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\|_{L^{\frac{q+1}{q}}}\leqslant$$
$$CE^{\frac{p}{2}}\left(\int_{\alpha|u_t|>1}^l u_t\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{q+1}}\leqslant CE^{\frac{p}{2}}|E'|^{\frac{q}{q+1}}\leqslant$$
$$\delta E^{\frac{p(q+1)}{2}}-C(\delta)E'\leqslant\delta E^{\frac{p+1}{2}}-C(\delta)E'$$

那么

$$C_1\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}\int_{\alpha|u_t|>1}^{l}(|u_t|^2+b|u\rho^{\frac{1}{2}}(u_t)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\delta\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\mathrm{d}t+C(\delta)E(S) \qquad (19)$$

由式(18)和式(19)可得到

$$(1-2\delta)\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\mathrm{d}t\leqslant C(\delta)E(S)$$

选择 $\delta=\dfrac{2}{5}$ 和 $A=5C\left(\dfrac{2}{5}\right)$，得到

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\mathrm{d}t\leqslant AE(S) \qquad 0\leqslant S<T<\infty$$

令 $T\to+\infty$，就得到如下不等式

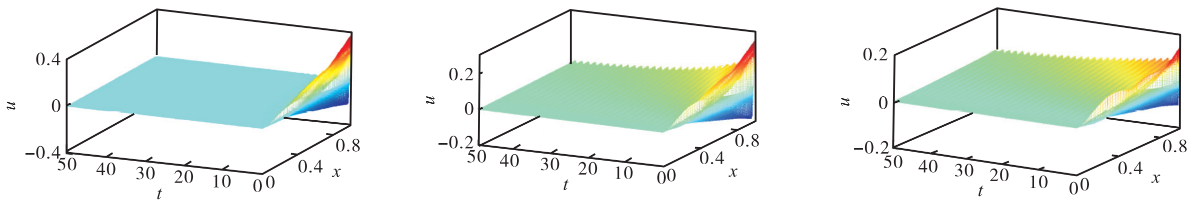
$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\mathrm{d}t\leqslant AE(S)$$

应用引理 1，则可得到定理 3 的结论.

由上述定理可知，系统在分数阶反馈控制器作用下可使得系统能量指数衰减或多项式衰减. 当控制器阶数小于 1 时，较之整数阶反馈控制器，能量衰减速度更快.

4　数值模拟

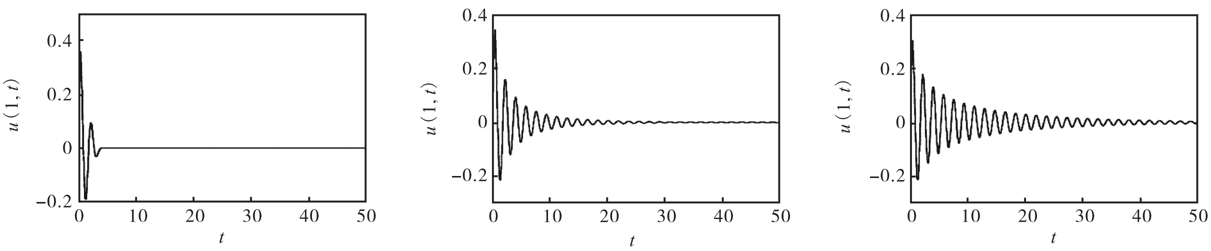
对 Euler-Bernoulli 梁闭环系统的稳定性进行数值模拟. 假定 Euler-Bernoulli 梁的长度 $l=1$，选择初始条件为 $u(x,0)=4x^2(x-1)^4$，$u_t(x,0)=2\cos(2x\pi+\dfrac{\pi}{2})$. 本文通过设计局部分数阶反馈控制器以镇定系统，其中，局部控制区间选择为 $[0.75,1]$，反馈控制分别选择为 $u_t^{1/2}(x,t)$、$u_t^{3/2}(x,t)$ 和 $u_t^{5/2}(x,t)$，对应图形见图 1；系统在 $x=1$ 处的动态行为见图 2.



(a) 反馈为 $u_t^{1/2}(x,t)$　　(b) 反馈为 $u_t^{3/2}(x,t)$　　(c) 反馈为 $u_t^{5/2}(x,t)$

图 1　在不同反馈下，$u(x,t)$ 的数值解

Fig. 1　Numerical solution of $u(x,t)$ based on different feedback



(a) 反馈为 $u_t^{1/2}(x,t)$　　(b) 反馈为 $u_t^{3/2}(x,t)$　　(c) 反馈为 $u_t^{5/2}(x,t)$

图 2　在不同反馈下，$u(1,t)$ 的数值解

Fig. 2　Numerical solution of $u(1,t)$ based on different feedback

通过数值模拟可以看到，局部分数阶反馈控制对该系统的控制是行之有效的，能迅速镇定该系统. 通过图 1 的对比易知，随着分数的阶数越来越低，控制的速度反而越来越快，这对提高控制速度有启示作用.

致谢：衷心感谢天津大学许跟起教授的鼓励与帮助！

参考文献：

[1] Guo B Z. Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients[J]. SIAM Journal on Control and Optimization，2002，40(6)：1905–1923.

[2] Guo B Z，Wen K. Lyapunov approach to the boundary stabilization of a beam equation with boundary disturbance[J]. International Journal of Control，2014，87(5)：925–939.

[3] Shang Y F，Xu G Q，Chen Y L. Stability analysis of Euler-Bernoulli beam with input delay in the boundary control[J]. Asian Journal of Control，2012，14(1)：186–196.

[4] Guo B Z，Jin F F. The active disturbance rejection and

sliding mode control approach to the stabilization of the Euler-Bernoulli beam equation with boundary input disturbance[J]. Automatica，2013，49(9)：2911–2918.
[5] Wang L，Han Z J，Xu G Q. Exponential stability and super-stability of a thermoelastic system of type II with boundary damping[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B，2015，20(8)：2733–2750.
[6] Wang L，Han Z J，Xu G Q. Stability of serially connected thermoelastic system of type II with nodal damping[J]. Applicable Analysis，2014，93(7)：1495–1514.
[7] Liu Z Y，Zheng S M. Semigroups Associated with Dissipative Systems[M]. London：Chapman and Hall/CRC，1999.
[8] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space[M]. Bucharest：Nordhoff International Publishing，1976.
[9] Komormik V. Exact Controllability and Stabilization：The Multiplier Method[M]. Paris：Masson，1994.
[10] Shi D H，Feng D X. Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information，2001，18(3)：395–403.
[11] Zhao H L，Liu K S，Zhang C G. Stability for the Timoshenko beam system with local Kelvin-Voigt damping[J]. Acta Mathematica Sinica：English Series，2005，21(3)：655–666.

责任编辑：常涛

（上接第 35 页）

[9] Overend R P，Chornet E，Gascoigne J A. Fractionation of lignocellulosics by steam-aqueous pretreatments[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A：Mathematical，Physical and Engineering Sciences，1987，321(1561)：523–536.
[10] Abatzoglou N，Chornet E，Belkacemi K，et al. Phenomenological kinetics of complex systems：The development of a generalized severity parameter and its application to lignocellulosics fractionation[J]. Chemical Engineering Science，1992，47(5)：1109–1122.
[11] Qin L，Liu Z H，Li B Z，et al. Mass balance and transformation of corn stover by pretreatment with different dilute organic acids[J]. Bioresource Technology，2012，112：319–326.
[12] Alvira P，Tomás-Pejó E，Ballesteros M，et al. Pretreatment technologies for an efficient bioethanol production process based on enzymatic hydrolysis：A review[J]. Bioresource Technology，2010，101(13)：4851–4861.
[13] Garrote G，Dominguez H，Parajo J C. Hydrothermal processing of lignocellulosic materials[J]. European Journal of Wood and Wood Products，1999，57(3)：191–202.
[14] Cara C，Ruiz E，Oliva J M，et al. Conversion of olive tree biomass into fermentable sugars by dilute acid pretreatment and enzymatic saccharification[J]. Bioresource Technology，2008，99(6)：1869–1876.
[15] Li J B，Henriksson G，Gellerstedt G. Carbohydrate reactions during high-temperature steam treatment of aspen wood[J]. Applied Biochemistry and Biotechnology，2005，125(3)：175–188.
[16] Donohoe B S，Decker S R，Tucker M P，et al. Visualizing lignin coalescence and migration through maize cell walls following thermochemical pretreatment[J]. Biotechnology and Bioengineering，2008，101(5)：913–925.
[17] Selig M J，Viamajala S，Decker S R，et al. Deposition of lignin droplets produced during dilute acid pretreatment of maize stems retards enzymatic hydrolysis of cellulose[J]. Biotechnology Progress，2007，23(6)：1333–1339.
[18] Radotić K，Mićić M，Jeremić M. New insights into the structural organization of the plant polymer lignin[J]. Annals of the New York Academy of Sciences，2005，1048(1)：215–229.
[19] Owen N L，Thomas D W. Infrared studies of “hard” and “soft” woods[J]. Applied Spectroscopy，1989，43(3)：451–455.
[20] Pandey K K. A study of chemical structure of soft and hardwood and wood polymers by FTIR spectroscopy[J]. Journal of Applied Polymer Science，1999，71(12)：1969–1975.

责任编辑：周建军