



DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20160101

异结构分数阶四翼混沌系统的同步及电路实现

贾红艳, 王庆合

(天津科技大学电子信息与自动化学院, 天津 300222)

摘要: 介绍了 2 个不同的分数阶四翼混沌系统, 给出了它们的四翼混沌吸引子的相轨迹图. 基于主动控制同步思想, 利用分数阶稳定性理论, 实现了这 2 个分数阶混沌系统之间的同步. 通过理论分析和数值仿真验证了该方法的可行性. 采用模拟电路技术实现了该同步控制, 电路仿真的结果与数值仿真结果一致, 进一步证实了方法的有效性.

关键词: 异结构; 分数阶; 四翼混沌系统; 同步; 电路实现

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6510(2017)01-0062-06

Synchronization of Four-wing Fractional-order Chaotic System with Different Structures and its Circuit Implementation

JIA Hongyan, WANG Qinghe

(College of Electric Information and Automation, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

Abstract: First of all, two four-wing chaotic attractors of two different four-wing fractional-order chaotic systems were given. Then based on active control synchronization and the stability theory of fractional order, synchronization between two fractional-order chaotic systems was achieved. The feasibility of the method was verified through theoretical analysis and numerical simulation. At last, analog circuit technology was used to realize the synchronization control. The result of the circuit simulation is consistent with the numerical simulation, which confirmed the effectiveness of the proposed method.

Key words: different structure; fractional-order; four-wing chaotic system; synchronization; circuit implementation

近年来,混沌同步控制已成为非线性动力学的研究热点.随着研究的深入,已提出了多种混沌同步控制方法,如:驱动-响应同步法^[1]、变量反馈控制同步法^[2-3]、主动-被动同步法^[4-6]、相互耦合同步法^[7]、自适应同步法^[8]、脉冲同步法^[9]等.随着在大量分数阶系统中发现混沌现象,如在分数阶 Chen 系统^[10]、分数阶 Chua's 电路^[11]、分数阶 Lorenz 系统^[12]中发现混沌吸引子,关于分数阶系统中的混沌动态成为了人们研究的热点.由于分数阶混沌系统的同步比整数阶混沌系统的同步在工程实践中具有更为突出的优点,因此关于分数阶混沌系统的同步引起了人们越来越多的研究,并取得了丰富的成果.例如:潘光等^[13]研究了分数阶 Liu 系统和 Arneodo 系统的自适应滑模同步控制;张若洵等^[14]设计了 3 种同步方法,实现了

1 个分数阶新超混沌系统的同步;Zhou 等^[15]利用反馈控制实现了 1 个分数阶超混沌系统的同步.

以上研究大部分是同结构分数阶系统之间的同步.异结构系统之间的同步在近年来也有了一定的研究,如李东等^[16]用主动控制同步法和自适应控制同步法实现了 2 个分数阶超混沌系统的异结构同步;张成芬等^[17]利用 Active 控制技术实现了分数阶 Liu 系统与分数阶统一混沌系统的异结构同步;张若洵等^[18]等提出了 1 种分数阶混沌系统异结构同步方法,并用实例进行了验证;王亚民等^[19]用广义投影同步方法实现了不同阶异结构分数阶混沌系统的同步.但大部分的研究是理论分析和数值仿真,而用模拟电路来实现异结构分数阶混沌同步的研究则很少.

另外,关于多翼混沌系统的研究最近也吸引了研

收稿日期: 2016-03-18; 修回日期: 2016-05-10

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(11202148)

作者简介: 贾红艳(1972—),女,天津人,副教授, jiah@tust.edu.cn

数字出版日期: 2016-12-01; 数字出版网址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/12.1355.N.20161201.1110.012.html>

究者的关注,如 Xue 等^[20]提出和分析了 1 个四翼超混沌系统;Guo 等^[21]用拓扑马蹄引理分析了 1 个分数阶四翼 Qi 系统等. 由于四翼混沌系统具有比双翼吸引子更为复杂的动力学特性,系统信号具有较宽的频谱带宽^[22],这使四翼混沌系统的同步控制在保密通信领域中拥有更突出的优点和应用前景,其中的异结构分数阶系统在保密通信领域更具有普遍性^[23],因此研究异结构四翼混沌系统的同步控制,尤其是分数阶四翼混沌系统的同步控制具有重要的理论意义和实用价值.

Jia 等^[24]和 Qi 等^[25]分别研究了分数阶四翼混沌系统和整数阶三维四翼混沌系统,如果把整数阶的四翼混沌系统转换为分数阶,通过控制方法实现这 2 个分数阶混沌系统的同步,即实现 2 个分数阶多翼混沌系统的异结构同步,将会丰富混沌同步的研究. 本文基于主动控制同步思想,利用分数阶稳定性理论实现了这 2 个分数阶四翼混沌系统的同步,然后用数值仿真验证了该方法的可行性,并用模拟电路实现了这 2 个四翼混沌系统的异结构同步.

1 异结构分数阶四翼混沌系统

贾红艳等^[24,26]利用拓扑马蹄引理和模拟电路实现分析和研究了 1 个三维四翼分数阶系统的混沌特性,其数学表达式为

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = ax_1 + dy_1 - y_1 z_1 \\ \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} = -by_1 - z_1 + x_1 z_1 \\ \frac{d^\alpha z_1}{dt^\alpha} = -x_1 - cz_1 + x_1 y_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: α 是分数阶次; a, b, c, d 是系统参数. 当阶次 $\alpha = 0.9$, 系统参数 $a = 0.5, b = 12, c = 5, d = 1$ 时,它的混沌吸引子呈现四翼状态,如图 1 所示.

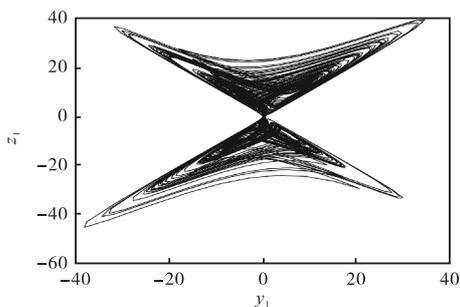


图 1 式(1)系统的四翼混沌吸引子

Fig. 1 Four-wing chaotic attractor of the system shown by equation (1)

Qi 系统^[25]的分数阶数学表达式可以描述为

$$\begin{cases} \frac{d^q x_2}{dt^q} = l(y_2 - x_2) + ky_2 z_2 \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} = gx_2 + hy_2 - x_2 z_2 \\ \frac{d^q z_2}{dt^q} = -fz_2 + x_2 y_2 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $f, g, h, k, l \in R; 0 < q < 1$. Qi 系统具有复杂的动力学特性,当 $q = 0.9, f = 8/3, g = 80, h = -1, l = 35, k = 1$ 时,系统会表现出 1 个两翼混沌吸引子. 当 $q = 0.9, f = 43, g = -1, h = 16, k = 4, l = 14$ 时,系统会呈现出 1 个四翼混沌吸引子,如图 2 所示. 本文主要研究的是阶次都为 0.9 时这 2 个系统的四翼混沌吸引子形态.

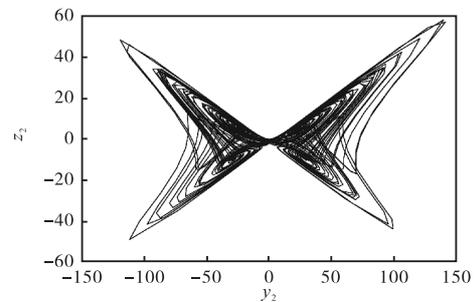


图 2 式(2)系统的四翼混沌吸引子

Fig. 2 Four-wing chaotic attractor of the system shown by equation (2)

从图 1 和图 2 可以看出: 2 个系统的四翼混沌吸引子看似一致,然而它们的动态特性却明显不同. 式(1)系统的四翼混沌吸引子是呈现在 $y_1 - z_1$ 投影平面上的,而式(2)系统的四翼混沌吸引子则呈现在 $x_2 - z_2$ 投影平面上.

2 同步研究

在进行 2 个系统的同步控制研究时,通常需将其中一个系统选为驱动系统,另一个则作为响应系统. 本文中将式(1)系统作为驱动系统,式(2)系统为响应系统,反之也可实现,这里不再赘述. 为了实现同步,作为响应系统的式(2)系统被改写为

$$\begin{cases} \frac{d^q x_2}{dt^q} = l(y_2 - x_2) + ky_2 z_2 + U_1 \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} = gx_2 + hy_2 - x_2 z_2 + U_2 \\ \frac{d^q z_2}{dt^q} = -fz_2 + x_2 y_2 + U_3 \end{cases} \quad (3)$$

式中: U_1, U_2, U_3 是用来实现系统同步的控制器. 即可通过选择合适的控制器 (U_1, U_2, U_3), 使 2 个系统达到同步, 也就是 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$.

定义系统的误差为 $e = (e_1, e_2, e_3)^T$, 其中 $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1$. 根据主动控制同步思想, 可以得到误差动力学系统方程为

$$\begin{cases} \frac{d^{0.9}e_1}{dt^{0.9}} = l(y_2 - x_2) - ax_1 - dy_1 + ky_2z_2 + y_1z_1 + U_1 \\ \frac{d^{0.9}e_2}{dt^{0.9}} = gx_2 + hy_2 + by_1 + z_1 - x_2z_2 - x_1z_1 + U_2 \\ \frac{d^{0.9}e_3}{dt^{0.9}} = x_1 - fz_2 + cz_1 + x_2y_2 - x_1y_1 + U_3 \end{cases} \quad (4)$$

整理可以得到

$$\begin{cases} \frac{d^{0.9}e_1}{dt^{0.9}} = ae_1 + e_2 - (l+a)x_2 + (l-d)y_2 + ky_2z_2 + y_1z_1 + U_1 \\ \frac{d^{0.9}e_2}{dt^{0.9}} = -be_2 + gx_2 + (h+b)y_2 + z_1 - x_2z_2 - x_1z_1 + U_2 \\ \frac{d^{0.9}e_3}{dt^{0.9}} = -ce_3 + x_1 - (f+c)z_2 + x_2y_2 - x_1y_1 + U_3 \end{cases} \quad (5)$$

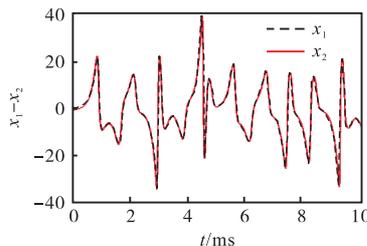
这时选择控制器

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l+a)x_2 + (d-l)y_2 - y_1z_1 - ky_2z_2 + W_1 \\ -z_1 - gx_2 - (h+b)y_2 + x_1z_1 + x_2z_2 + W_2 \\ -x_1 + (f+c)z_2 + x_1y_1 - x_2y_2 + W_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

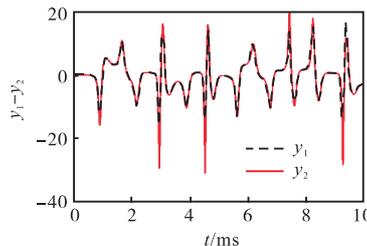
其中 W_1, W_2, W_3 是控制输入项, 即可以通过选择合适的 W_1, W_2, W_3 , 使误差动力学系统渐进稳定, 误差 e_1, e_2, e_3 在时间 t 趋于无限时渐进为零.

将式(6)代入式(5), 整理可得

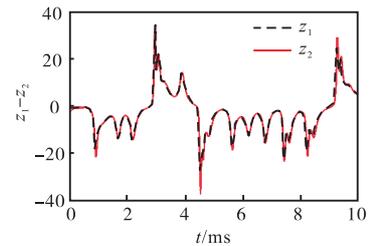
$$\begin{cases} \frac{d^{0.9}e_1}{dt^{0.9}} = ae_1 + e_2 + W_1 \\ \frac{d^{0.9}e_2}{dt^{0.9}} = -be_2 + W_2 \\ \frac{d^{0.9}e_3}{dt^{0.9}} = -ce_3 + W_3 \end{cases} \quad (7)$$



(a) $x_1 - x_2$ 随时间变化



(b) $y_1 - y_2$ 随时间变化



(c) $z_1 - z_2$ 随时间变化

图 3 驱动-响应系统的状态变量随时间变化的曲线

Fig. 3 Curves of the state variables of the drive-response systems versus time

由分数阶线性系统稳定性理论可知, 当误差动力学系统特征矩阵的所有特征值均具有负实部, 即所有特征值的幅角满足 $|\arg \lambda_i| > 0.5\pi$, 可使误差状态变量渐进收敛到零, 也就是 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$, 从而使 2 个系统同步. 为简化计算和便于设计同步模拟电路, 选择

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a-1)e_1 - e_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7), 则误差动力学系统简化为

$$\begin{cases} \frac{d^{0.9}e_1}{dt^{0.9}} = -e_1 \\ \frac{d^{0.9}e_2}{dt^{0.9}} = -be_2 \\ \frac{d^{0.9}e_3}{dt^{0.9}} = -ce_3 \end{cases} \quad (9)$$

经计算可得特征值为 $-1, -b, -c$. 由于 $b > 0, c > 0$, 因此特征值均为负数. 根据分数阶线性系统稳定性理论, 误差状态变量渐进趋近于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$. 根据理论分析可知, 驱动系统(1)和响应系统(3)实现了同步.

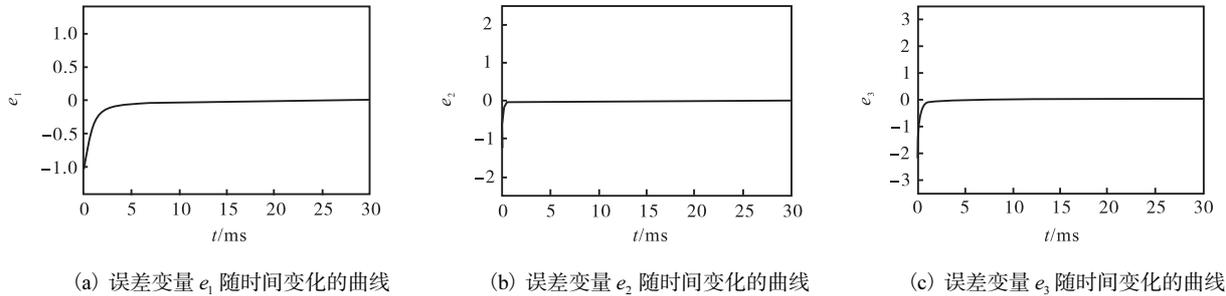
3 数值仿真分析

根据以上同步设计进行数值仿真. 式(1)系统和式(2)系统的参数取值为 $a=5, b=12, c=5, d=1, f=43, g=-1, h=16, k=4, l=14$, 系统变量的初值分别取为 $x_1(0)=0.1, y_1(0)=0.2, z_1(0)=0.3, x_2(0)=-1, y_2(0)=-2, z_2(0)=-3$, 取时间步长为 0.001, 仿真结果见图 3 和图 4.

图 3 为驱动-响应系统对应的状态变量随时间变化的曲线, 可以看出驱动-响应系统的状态变量 $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ 随时间变化的曲线几乎完全一致.

图4为误差变量 e_1, e_2, e_3 随时间变化的曲线, 可以看出误差随着时间的变化也逐渐趋近于零. 因此

可以得出结论, 式(1)系统和式(3)系统实现了同步, 这也说明了理论分析中提出的同步方法是可行的.



(a) 误差变量 e_1 随时间变化的曲线 (b) 误差变量 e_2 随时间变化的曲线 (c) 误差变量 e_3 随时间变化的曲线

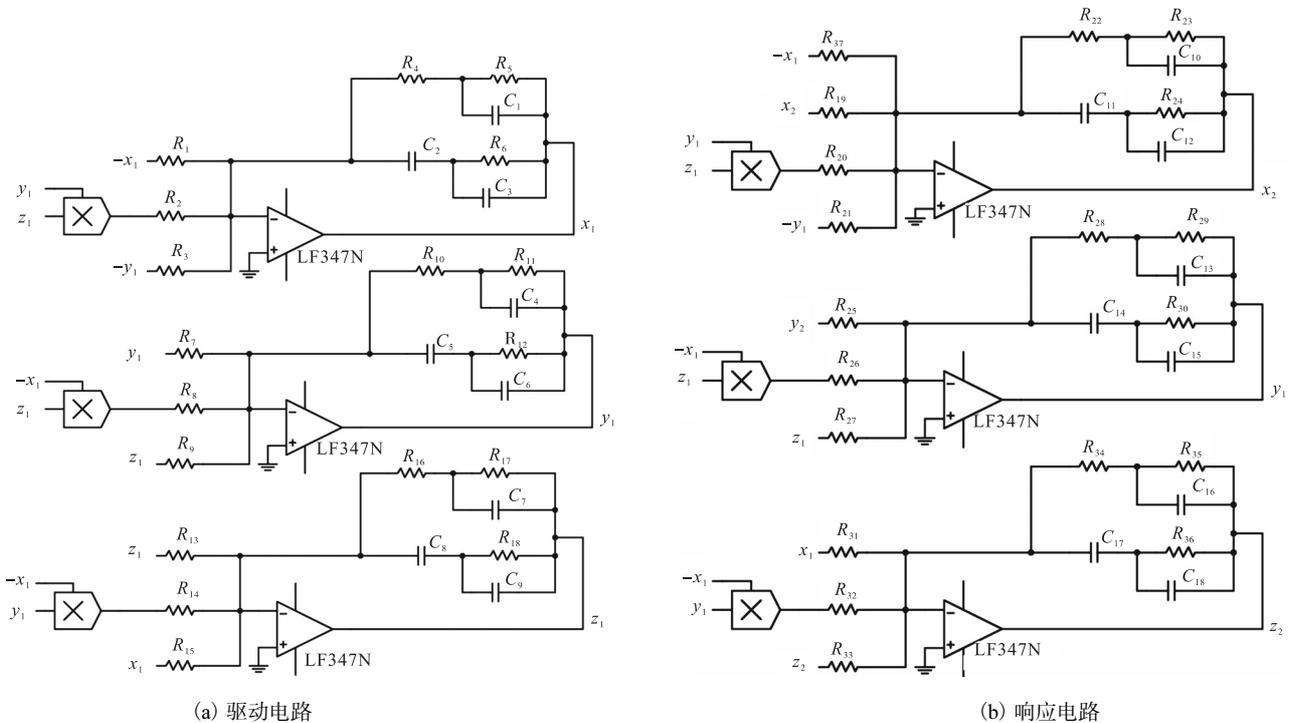
图4 误差变量随时间变化的曲线

Fig. 4 Curves of error variables versus time

4 同步电路设计

为进一步验证上述理论分析的正确性, 采用了时域-频域近似转换法, 基于改进型电路模块设计了模拟同步控制电路, 见图5. 电路中的乘法器采用AD633(输出增益为0.1), 运算放大器采用LF347N, $R_1 = R_{13} = R_{33} = 2\text{ k}\Omega$, $R_2 = R_8 = R_{14} = R_{20} = R_{26} = R_{32} = 200\ \Omega$, $R_3 = R_9 = R_{15} = R_{19} = R_{21} = R_{27} = R_{31} = 10\text{ k}\Omega$, $R_4 = R_{10} = R_{16} = R_{22} = R_{28} = R_{34} = 1.55\text{ M}\Omega$,

$R_5 = R_{11} = R_{17} = R_{23} = R_{29} = R_{35} = 62\text{ M}\Omega$, $R_6 = R_{12} = R_{18} = R_{24} = R_{30} = R_{36} = 2.5\text{ k}\Omega$, $R_7 = R_{25} = 833.3\ \Omega$, $R_{37} = 1.667\text{ k}\Omega$; $C_1 = C_4 = C_7 = C_{10} = C_{13} = C_{16} = 0.52\ \mu\text{F}$, $C_2 = C_5 = C_8 = C_{11} = C_{14} = C_{17} = 0.7\ \mu\text{F}$, $C_3 = C_6 = C_9 = C_{12} = C_{15} = C_{18} = 1.1\ \mu\text{F}$. 用电路仿真软件进行仿真, 其中关于 $x_1 - x_2$ 的同步相轨迹和同步时序图见图6. $x_1 - x_2$ 的同步相轨迹是1条直线, 同步时序图几乎完全一致, 并且电路仿真结果与数值仿真的结果一致, 表明2个系统实现了同步, 说明上述的理论分析正确, 提出的同步方法可行.

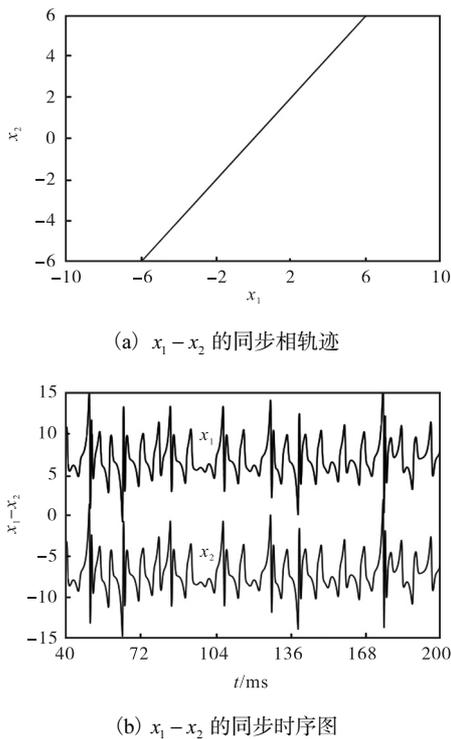


(a) 驱动电路

(b) 响应电路

图5 驱动-响应系统的同步电路

Fig. 5 Synchronous circuit of drive and response systems

图6 $x_1 - x_2$ 的同步相轨迹图和同步时序图Fig. 6 Phase synchronization and time series of $x_1 - x_2$

5 结 语

本文基于主动控制同步思想,利用分数阶线性系统稳定性理论,实现了2个异结构分数阶四翼混沌系统之间的同步.理论分析和数值仿真验证了该同步方法的有效性,并通过模拟电路实现了该同步控制.研究结果可为不同结构的分数阶混沌系统之间的同步控制提供借鉴,为分数阶混沌在工程实践中的应用提供模型和技术支持.

参考文献:

- [1] 林立雄,彭侠夫.基于函数矩阵的一类混沌系统同步[J].物理学报,2014,63(8):80504-1-80504-11.
- [2] 秦卫阳,孙涛,焦旭东,等.一类动力学系统通过函数耦合实现混沌同步[J].物理学报,2012,61(9):90502-1-90502-5.
- [3] Wu C J, Zhang Y B, Yang N N. The synchronization of a fractional order hyper-chaotic system based on passive control[J]. Chinese Physics B, 2011, 20(6): 060505-1-060505-7.
- [4] Sundarapandian V, Suresh R. Global chaos synchronization for Rossler and Arneodo chaotic systems by nonlinear control[J]. Far East Journal of Applied Mathematics, 2010, 44(2): 137-148.
- [5] Ge Z M, Leu W Y. Chaos synchronization and parameter identification for loudspeaker systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 21(5): 1231-1247.
- [6] Kocarev L, Parlitz U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication[J]. Physical Review Letters, 1995, 74(25): 5028-1-5028-4.
- [7] Deng W H, Li C P. Chaos synchronization of the fractional Lü system[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005, 353: 61-72.
- [8] 刘福才,李俊义,臧秀凤.基于自适应主动及滑模控制的分数阶超混沌系统异结构反同步[J].物理学报,2011,60(3):030504-1-030504-10.
- [9] Wang X Y, Zhang Y L, Lin D, et al. Impulsive synchronization of a class of fractional-order hyperchaotic systems[J]. Chinese Physics B, 2011, 20(3): 030506-1-030506-7.
- [10] Lu J G. Nonlinear observer design to synchronize fractional-order chaotic systems via a scalar transmitted signal[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2006, 359: 107-118.
- [11] Yu J B, Gao X. Chaos and chaotic control in a fractional-order electronic oscillator[J]. Chinese Physics, 2005, 14(5): 908-913.
- [12] Yu Y G, Li H X, Wang S, et al. Dynamic analysis of a fractional-order Lorenz chaotic system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42(2): 1181-1189.
- [13] 潘光,魏静.一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计[J].物理学报,2015,64(4):040505-1-040505-7.
- [14] 张若洵,杨世平.一个分数阶新超混沌系统的同步[J].物理学报,2008,57(11):6837-6843.
- [15] Zhou P, Wei L J, Cheng X F. A novel fractional-order hyper-chaotic system and its synchronization[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(7): 2674-2679.
- [16] 李东,邓亮明,杜永霞,等.分数阶超混沌 Chen 系统和分数阶超混沌 Rossler 系统的异结构同步[J].物理学报,2012,61(5):050502-1-050502-9.
- [17] 张成芬,高金峰,徐磊.分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统中的混沌现象及二者的异结构同步[J].物理学报,2007,56(9):5124-5130.
- [18] 张若洵,杨世平.分数阶混沌系统的异结构同步[J].物理学报,2008,57(11):6852-6858.
- [19] 王亚民,朱鑫铨,姬天福,等.不同阶异结构分数阶混沌系统的广义投影同步[J].扬州大学学报:自然科学

- 版,2013,16(4):22-25.
- [20] Xue W, Qi G Y, Mu J J, et al. Hopf bifurcation analysis and circuit implementation for a novel four-wing hyperchaotic system[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(8): 080504-1-080504-8.
- [21] Guo Y L, Qi G Y. Topological horseshoe in a fractional-order Qi four-wing chaotic system[J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2015, 5(2): 168-176.
- [22] 李瑞军. 分数阶四翼超混沌系统的控制与同步[J]. 重庆工商大学学报, 2014, 31(12): 11-17.
- [23] 屈双惠, 张彩霞, 杨志宏, 等. 分数阶四翼超混沌系统和分数阶 Chen 系统的异结构同步[J]. 四川大学学报, 2014, 51(1): 131-136.
- [24] Jia H Y, Chen Z Q, Qi G Y. Chaotic characteristics analysis and circuit implementation for a fractional-order system[J]. IEEE Transactions on Circuits and System I: Regular Papers, 2014, 61(3): 845-853.
- [25] Qi G Y, Chen G R, van Wyk M A, et al. A four-wing chaotic attractor generated from a new 3-D quadratic autonomous system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38(3): 705-721.
- [26] 贾红艳. 一个分数阶混沌系统的分析及电路设计[J]. 天津科技大学学报, 2013, 28(1): 55-58.

责任编辑:常涛

(上接第55页)

- [5] 孙潇潇, 刘宁, 钱新, 等. 基于健康风险的土壤修复目标值的研究:以某多环芳烃污染场地为例[J]. 安徽农业科学, 2014, 42(13): 4012-4014.
- [6] 李青青. 基于健康风险的土壤修复目标研究程序与方法:以多环芳烃污染土壤再利用工程为例[J]. 生态与农村环境学报, 2010, 26(6): 610-615.
- [7] 姜林, 彭超, 钟茂生, 等. 基于污染场地土壤中重金属人体可给性的健康风险评价[J]. 环境科学研究, 2014, 27(4): 406-414.
- [8] 姜林, 钟茂生, 张丹, 等. 污染场地土壤多环芳烃(PAHs)生物可利用浓度的健康风险评价方法[J]. 生态环境学报, 2011, 20(6/7): 1168-1175.
- [9] Ng J C, Juhasa A L, Smith E, et al. Contaminant bioavailability and bioaccessibility: Part 1. A scientific and technical review[R]. Mawson Lakes: Cooperative Research Center of Contamination Assessment and Remediation of Environment, 2010.
- [10] 钟茂生, 彭超, 姜林, 等. 老化土壤中 As 的人体可给性控制因素及健康风险[J]. 环境科学研究, 2015, 28(2): 267-274.
- [11] 李继宁, 侯红, 魏源, 等. 株洲市农田土壤重金属生物可给性及其人体健康风险评估[J]. 环境科学研究, 2013, 26(10): 1139-1146.
- [12] 张慧, 王佳敏, 羊嘉文, 等. 土壤标准物质中 Pb 生物可给量的体外模拟试验[J]. 环境科学与技术, 2013, 36(4): 69-73.
- [13] 崔岩山, 陈晓晨. 土壤中镉的生物可给性及其对人体的健康风险评估[J]. 环境科学, 2010, 31(2): 403-408.
- [14] Jennings A A. Analysis of worldwide regulatory guidance values for the most commonly regulated elemental surface soil contamination[J]. Journal of Environmental Management, 2013, 118(2): 72-95.
- [15] 韩春梅, 王林山, 巩宗强, 等. 土壤中重金属形态分析及其环境学意义[J]. 生态学杂志, 2005, 24(12): 1499-1502.
- [16] 乔敏敏, 季宏兵, 朱先芳, 等. 密云水库入库河流沉积物中重金属形态分析及风险评估[J]. 环境科学学报, 2013, 33(12): 3324-3333.
- [17] Denys S, Caboche J, Tack K, et al. In vivo validation of the unified BARGE method to assess the bioaccessibility of arsenic, antimony, cadmium, and lead in soils[J]. Environmental Science & Technology, 2012, 46(11): 6252-6260.
- [18] Boisa N, Elom N, Dean J R, et al. Development and application of an inhalation bioaccessibility method (IBM) for lead in the PM 10 size fraction of soil[J]. Environment International, 2014, 70: 132-142.
- [19] Drysdale M, Bjorklund K L, Jamieson H E, et al. Evaluating the respiratory bioaccessibility of nickel in soil through the use of a simulated lung fluid[J]. Environmental Geochemistry and Health, 2012, 34(2): 279-288.

责任编辑:周建军