



DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20150002

## 新型内平动分度凸轮机构啮合效率分析

刘明涛, 徐俊丰, 李彦启, 翟凤潇, 薛永宁  
(天津科技大学机械工程学院, 天津 300222)

**摘要:** 为建立内平动分度凸轮机构的效率模型, 首先分析了针齿与凸轮的相对滑动速度, 在考虑摩擦力的影响下计算了针齿-凸轮副的啮合力, 在此基础上求出了针齿-凸轮副的啮合效率; 分析了啮合平均效率随设计参数变化的规律, 拟合求得了以针齿分布圆半径和偏心距为自变量的平均效率公式. 研究表明, 平均效率随针齿分布圆半径增大而减小, 随偏心距增大而增大.

**关键词:** 分度机构; 相对速度; 啮合力; 啮合效率

**中图分类号:** TH112.2      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-6510(2015)06-0052-05

## Meshing Efficiency Calculation of Inner Parallel Indexing Cam Mechanism

LIU Mingtao, XU Junfeng, LI Yanqi, ZHAI Fengxiao, XUE Yongning  
(College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

**Abstract:** In order to establish an efficiency model of inner parallel indexing cam mechanism, the relative sliding velocity between the cam and needle gears was analyzed. Meshing force between the cam and needle gears was calculated by considering the influence of friction. Based on the velocity and the force, the meshing efficiency between the cam and needle gears was derived. The relationship between average meshing efficiency and key parameters were discussed. The average meshing efficiency formula was derived on the basis of the fitting theory with eccentricity and the needle gear distribution circle radius as the independent variables. It is concluded that the average efficiency decreases with the increase of the needle gear distribution circle radius and increases with the increase of the eccentricity.

**Key words:** indexing mechanism; relative velocity; meshing force; meshing efficiency

分度凸轮机构广泛应用于印刷、包装、食品等自动化机械中, 除需满足一定分度精度与定位精度外, 传动效率的高低也是判断其综合性能的重要指标. 文献[1]对弧面分度凸轮机构的功率损耗进行研究, 得出了该机构的啮合效率公式及关键参数对啮合效率的影响. 文献[2-4]基于从动件的受力分析、凸轮力矩平衡条件等建立了各盘形凸轮机构的效率计算模型. 文献[5]用啮合功率法分析了偏心推杆行星传动的啮合效率, 并提出了提高啮合效率的途径.

内平动分度凸轮机构是一种新型的间歇机构, 用以实现工作台的转位、停歇动作. 该机构由平行四边形机构与平面凸轮机构组合而成, 其效率的高低主要取决于针齿-凸轮副的啮合效率. 本文将基于齿廓间

相对滑动速度与针齿-凸轮副啮合力计算啮合过程中的摩擦损耗<sup>[3]</sup>, 进而求得该啮合副的传动效率, 并分析机构瞬时啮合效率的变化规律及机构主参数对平均啮合效率的影响.

### 1 啮合效率的计算

图 1 为内平动分度凸轮机构的传动原理图和传动结构图, 具体传动原理见文献[6]. 针齿与凸轮的传动副可认为是两构件组成的滑动兼滚动的高副, 由于滚动摩擦较滑动摩擦要小的多, 所以本文仅以滑动摩擦的损耗作为啮合的功率损失. 为便于分析计算, 将两片相位差为 180° 的凸轮等效成一片处理. 设滑动

收稿日期: 2015-01-04; 修回日期: 2015-04-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50905127); 天津市应用基础与前沿技术研究计划资助项目(15JCZDJC39100)

作者简介: 刘明涛(1974—), 女, 山东蓬莱人, 副教授, liumingtao@tust.edu.cn.

数字出版日期: 2015-07-08; 数字出版网址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/12.1355.N.20150708.1622.004.html>.

摩擦因数为  $\mu$ , 任一时刻同时参与啮合的针齿号从  $m$  到  $n$ , 凸轮与针齿的啮合力为  $F_i$ , 相对滑动速度为  $V_{vi}$ , 则由啮合产生的摩擦损耗功率<sup>[7]</sup>为

$$N_f = \mu \sum_{i=m}^n F_i V_{vi} \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (1)$$

设输出扭矩为  $T_o$ , 输出转速为  $\omega_o$ , 则输出功率为

$$N_o = T_o \omega_o = J \alpha \omega_o \quad (2)$$

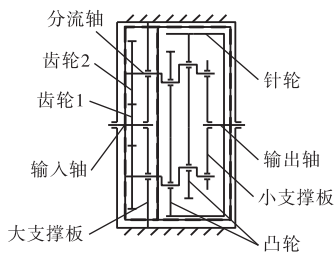
式中:  $J$  为从动件和负载的转动惯量之和;  $\alpha$  为针轮的角加速度.

在无因次时间 0 到 1 内任一时刻凸轮与针齿的啮合效率为

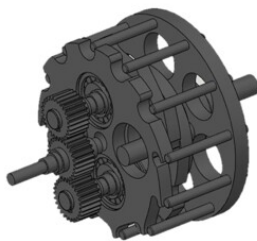
$$\eta_{zb} = \frac{N_o}{N_o + N_f} \quad (3)$$

将式(1)和(2)代入式(3), 可得

$$\eta_{zb} = \frac{J \alpha \omega_o}{J \alpha \omega_o + \mu \sum_{i=m}^n (F_i V_{vi})} \quad (4)$$



(a) 传动原理图



(b) 传动结构图

图 1 传动原理和传动结构

Fig. 1 Elements and structure of transmission

### 1.1 相对滑动速度的求解

凸轮与针齿间相对滑动速度  $V_{vi}$  的求解需要借助于凸轮廓线方程的推导, 其具体推导过程可参考文献[8]. 图 2 所示为推导凸轮廓线时所建立的坐标系及位置矢量的表达, 图中:  $\theta_H(t)$  为机构输入轴转角;  $\theta_g(t)$  为机构输出轴转角, 即针轮转角;  $\alpha_i$  为各针齿位置角度,  $\alpha_i = 2\pi(i-1)/12$ .

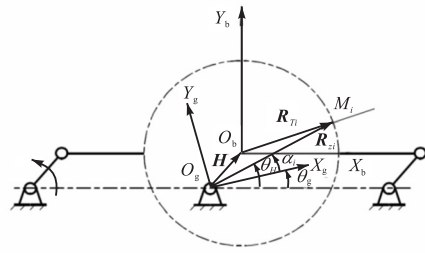


图 2 凸轮廓线求解的坐标系

Fig. 2 Coordinate system of the contour line's solving

动坐标系  $O_b X_b Y_b$  与凸轮固连, 动坐标系  $O_g X_g Y_g$  与针轮固连,  $R_{zi}$  为第  $i$  个针齿理论齿廓  $M_i$  在动坐标系  $O_g X_g Y_g$  中的位置矢量,  $H$  为针轮的回转中心  $O_g$  在动坐标系  $O_b X_b Y_b$  中的位置矢量. 利用平面矢量的复数极坐标表示为

$$\begin{cases} R_{zi}(t) = R_z e^{j(\alpha_i + \theta_g(t))} \\ H(t) = e e^{j\theta_H(t)} \end{cases} \quad t \in [0, T], i = 1, 2, \dots, 12 \quad (5)$$

式中:  $R_z$  为针齿分布圆半径;  $e$  为偏心距 (凸轮与针轮回转中心  $O_b$  和  $O_g$  的距离);  $T$  为分度周期.

任一时刻第  $i$  个针齿理论齿廓的速度为

$$v_{zi}(t) = \dot{R}_{zi}(t) \quad (6)$$

由于凸轮随平行四边形机构做平动, 所以凸轮任一时刻的速度  $v_b(t)$  与平行四边形转臂的速度一致, 即

$$v_b(t) = \dot{H}(t) \quad (7)$$

依据式(5)一式(7)可知, 任一时刻, 理论廓线上凸轮与针齿的相对滑动速度为

$$v_{rai}(t) = \dot{R}_{zi}(t) - \dot{H}(t) = \dot{R}_{Ti}(t) \quad (8)$$

由于凸轮实际廓线由理论廓线的内外等距廓线拼接而成, 所以实际廓线上凸轮与针齿的相对滑动速度为

$$v_{ri}(t) = \begin{cases} \dot{R}_{Ti}(t) + r_z \dot{n}_i(t) & \text{实际廓线取外等距廓线} \\ \dot{R}_{Ti}(t) - r_z \dot{n}_i(t) & \text{实际廓线取内等距廓线} \end{cases} \quad (9)$$

### 1.2 考虑摩擦的针齿与凸轮啮合力的计算

假设装配间隙为零, 忽略凸轮、针齿架的变形, 设某一时刻作用在针轮上的驱动力矩为  $T_b(t)$ , 根据针轮的运动状态, 有

$$T_b(t) = J \alpha \quad (10)$$

式中:  $J$  为机构输出部件与负载的等效转动惯量;  $\alpha$  为针轮的角加速度.

设  $t$  时刻凸轮作用于针齿上的作用力依次为  $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$ , 各力的作用线相交于瞬心  $P$ , 如图 3 所示, 针齿因和凸轮相对滑动而受的摩擦力依次为  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ , 根据针轮的输入输出扭矩平衡

关系建立如下方程

$$\sum_{i=1}^n (F_i(t)L_{gi}(t) + d_i(t)f_i(t)L_{fi}(t)) = J\alpha \quad (11)$$

式中:  $d_i(t)$  为摩擦力性质系数, 表示摩擦力对针齿运动的作用效果;  $L_{gi}(t)$ 、 $L_{fi}(t)$  分别为第  $i$  号针齿啮合力与摩擦力的力臂;  $\alpha_{pi}(t)$  为机构的压力角, 其求解方法见文献[9].

$$L_{gi}(t) = R_z \cos \alpha_{pi}(t) \quad (12)$$

$$L_{fi}(t) = R_z \sin \alpha_{pi}(t) \quad (13)$$

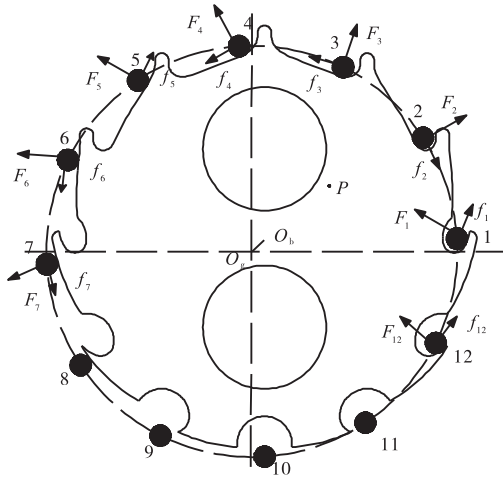
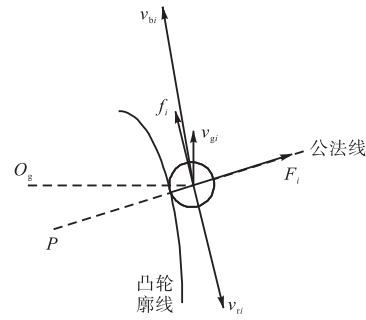


图3 针齿受力分析

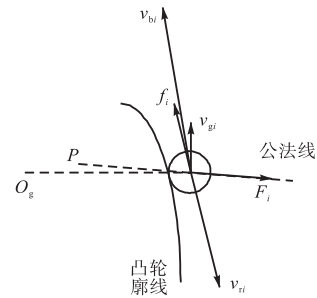
Fig. 3 Analysis of needle gear's meshing force

摩擦力作用系数的确定借助针齿的受力分析, 针齿受力的局部放大图如图4所示,  $O_g$  为针轮的回转中心,  $P$  为凸轮与针轮的相对速度瞬心,  $v_{gi}$  为第  $i$  号针齿在这一时刻的绝对速度,  $v_{bi}$  为在这一时刻凸轮的绝对速度,  $v_{ri}$  为这一时刻针齿相对于凸轮的速度.  $F_i$  为凸轮与针齿间的啮合力,  $f_i$  为针齿相对凸轮滑动时所受的摩擦力. 加速段, 凸轮推动针齿运动,  $F_i$  为驱动力, 若针齿相对凸轮的速度  $v_{ri}$  与针齿的速度  $v_{gi}$  之间的夹角为钝角, 则此时摩擦力的作用与啮合力  $F_i$  相同, 同为驱动力; 反之, 若两速度夹角为锐角, 则摩擦力为阻力. 减速段, 凸轮阻碍针齿运动,  $F_i$  为阻力, 此时因压力角大于  $90^\circ$ , 式(11)第一项已为负值, 若针齿相对凸轮的速度  $v_{ri}$  与针齿的速度  $v_{gi}$  夹角为锐角, 则此时摩擦力的作用与啮合力  $F_i$  相同, 同为阻力; 反之, 若夹角为钝角, 摩擦力为驱动力. 由此确定摩擦力作用系数:

$$d_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{绝对速度与相对速度夹角为钝角} \\ -1 & \text{绝对速度与相对速度夹角为锐角} \end{cases} \quad (14)$$



(a) 加速段  $v_{ri}$  与  $v_{gi}$  夹角为钝角时



(b) 减速段  $v_{ri}$  与  $v_{gi}$  夹角为钝角时

图4 针齿受力局部放大图

Fig. 4 Partially enlarged detail of needle gear's meshing force

参考文献[8]建立各针齿受力的变形协调条件. 假设针轮在某时刻  $t$  不动, 作用于凸轮上的驱动力使针齿产生弯曲变形和啮合点处的接触变形, 此时在针齿中心处相应的产生一个大小相同的微小周向位移, 用矢量  $\Delta u_i(t)$  表示. 加速段时,  $\Delta u_i(t)$  的方向与该啮合点处针轮速度方向相同; 减速段时,  $\Delta u_i(t)$  的方向与该啮合点处针轮速度方向相反. 各矢量的模相等, 均为  $\Delta u(t)$ , 则

$$\Delta u_i(t) = \begin{cases} -j\Delta u(t)e^{j(\alpha_i + \theta_g(t))} & \text{加速段} \\ j\Delta u(t)e^{j(\alpha_i + \theta_g(t))} & \text{减速段} \end{cases} \quad (15)$$

假定凸轮作用于各针齿的力  $F_i(t)$  与针齿的微小位移  $\Delta u_i(t)$  在该力方向上的投影成正比. 即可表示成:  $F_i(t) \propto \Delta u_i(t) \cdot n_i(t)$ , 其中  $n_i(t)$  为针齿受力的法向量, 文献[9]中已求解. 因此可设一常数  $k$ , 令

$$\frac{F_i(t)}{\Delta u_i(t) \cdot n_i(t)} = k \quad (16)$$

用压力角表示为

$$F_i(t) = \begin{cases} \Delta u(t)k \cos \alpha_{pi}(t) & \text{加速段} \\ \Delta u(t)k \cos(\pi - \alpha_{pi}(t)) & \text{减速段} \end{cases} \quad (17)$$

考虑针齿受力状态的复杂性, 特引入受力状态向量  $B(t)$ , 表示考虑凸轮理论廓线自相交及凸轮压力角

对受力状态的影响. 在任一时刻  $t$ , 针齿与凸轮的啮合力判定条件为: 两者相互接触为加速期时, 压力角小于  $90^\circ$  时存在啮合力; 当两者相互接触为减速期时, 压力角大于  $90^\circ$  时存在啮合力. 令

$$B(t) = \begin{Bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式中:

$$b_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{针齿参与受力} \\ 0 & \text{针齿不参与受力} \end{cases}$$

由式(8)一式(10)可将计入摩擦下的针轮输入输出扭矩平衡关系转化为

$$\sum_{i=1}^n [b_i(t)k\Delta u_i(t)n_i(t)(L_{gi}(t) + \mu d_i(t)L_{gi}(t))] = J\alpha \quad (19)$$

借助 Matlab 软件, 由式(19)计算出  $k\Delta u(t)$  后代入式(16), 可求解出每个针齿与凸轮的啮合力  $F_i$ . 将求得的  $V_{vi}$ 、 $F_i$  代入式(4), 便可求出针齿-凸轮副的啮合效率.

## 2 针齿-凸轮副瞬时效率的变化规律

针轮分度期内的输出是加速度为修正正弦的运动, 负载转矩的变化规律与针齿-凸轮副啮合力的

变化规律分别如图 5 和图 6 所示. 选定表 1 内所示的机构设计参数, 分别取滑动摩擦系数  $\mu = 0.07$  和  $\mu = 0.1$ , 求得针齿-凸轮副的啮合效率曲线如图 7 所示.

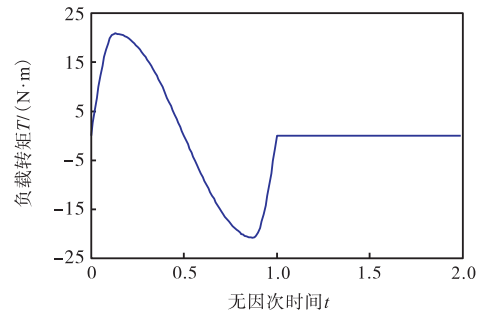


图 5 负载转矩

Fig. 5 Loading torque

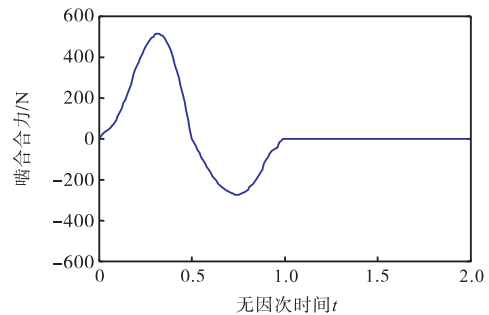


图 6 针齿-凸轮啮合力

Fig. 6 Meshing force between the cam and needle gears

表 1 机构设计参数

Tab. 1 Design parameters of mechanism

分度数	针齿分布圆半径 $R_v$	偏心距 $e$	针径系数 $k_v$	动静比 $d$	惯性负载 $J$	运动规律
12	120 mm	10 mm	0.6	1.0	0.72 kg·m <sup>2</sup>	MS

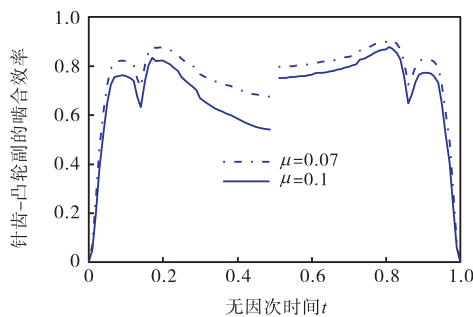


图 7 针齿-凸轮副啮合效率曲线

Fig. 7 Meshing efficiency curve between the cam and needle gears

当  $\mu = 0.07$  时, 分度期内的平均效率为 75.10%, 当  $\mu = 0.1$  时, 平均效率为 68.49%, 可见滑动摩擦系数对针齿-凸轮副的啮合效率影响较大, 这就对材料

的选择以及润滑提出了较高的要求. 从效率值分析, 由于圆柱直齿轮啮合效率在 98% 左右, 因此针齿-凸轮副是影响该机构传动效率的主要因素, 由于停歇期无输出, 啮合效率为 0, 图 7 中只绘制出了分度期的效率曲线.

效率曲线并不对称, 主要是因为: 摩擦力作用性质在加、减速期不对称, 改变了针齿-凸轮副啮合力的对称性, 由于摩擦力与啮合力正相关, 曲线形式相同, 因此分度期内啮合效率曲线不对称. 啮合效率曲线值在 Matlab 程序中以数组形式存储(无量纲时间  $0 \sim 1$  内取 100 个数据点), 在  $t = 0.5$  这一时刻, 负载转矩为 0, 相当于空载, 不存在传动效率. 图 7 中效率曲线的断点分别对应于  $t = 0.49$  和  $t = 0.51$  时刻, 意为加速期最后一个瞬时效率点和减速期的起始效率点.

### 3 机构设计参数对啮合平均效率的影响

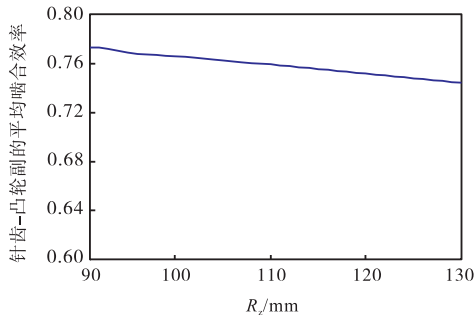
以下计算的初始数据,除当前被分析的参数外,其余均与表1中相同( $\mu$ 取0.07).

#### 3.1 针齿分布圆半径 $R_z$ 的影响

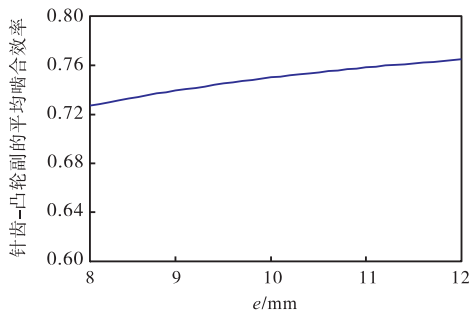
如图8(a)所示,计算结果表明针齿的分布圆半径  $R_z$  对啮合平均效率是有影响的,随着  $R_z$  的增大,平均效率逐渐减小.  $R_z$  对机构的径向尺寸有着决定性影响,在结构设计合理的前提下尽可能地减小  $R_z$  不仅能减小机构体积,而且有利于提高传动效率.

#### 3.2 偏心距 $e$ 的影响

偏心距  $e$  为针轮与凸轮几何中心距距离,平均效率曲线随  $e$  的变化规律如图8(b)所示,表明偏心距  $e$  也对针齿-凸轮副的啮合效率有一定影响,随  $e$  的增大,平均效率逐渐增大. 从 Matlab 程序所生成的凸轮廓线来看,偏心距  $e$  较小时廓线尖点的个数较多,同时由于偏心距也影响偏心套的尺寸及转臂轴承的选取. 综合考虑,偏心距选择不宜过小.



(a)  $R_z$  对平均效率的影响



(b)  $e$  对平均效率的影响

图8 关键参数对啮合副平均效率的影响

Fig. 8 Influence of key parameters on the meshing average efficiency

### 4 平均效率曲线的拟合

考虑用拟合的方法建立平均啮合效率  $\bar{\eta}$  与关键

参数  $R_z$  和  $e$  间的解析式. 通常情况下,只要自变量区间划分适当,总能在各区间内找到一个低阶多项式来逼近真实函数关系. 分别在 Matlab 中计算不同参数值(只将  $R_z$  和  $e$  作为变量,其他参数按表1选取,  $\mu=0.07$ )下的平均效率作为拟合观测值. 运用 Minitab 进行统计分析<sup>[10]</sup>,由一阶模型入手逐步分析,直到回归分析和残差诊断满足要求为止. 最终拟合所得平均效率公式为

$$\bar{\eta} = 0.77025 - 0.16154 \times 10^{-2} R_z + 0.015277e - 0.46 \times 10^{-6} R_z^2 - 0.9029 \times 10^{-3} e^2 + 0.988 \times 10^{-4} R_z e$$

拟合公式计算得到平均效率为 75.08%,较理论值 75.10%的误差为 0.027%,满足要求. 该拟合公式可作为后续建立机构效率优化模型的基础,以实现整机性能的优化设计.

### 5 结 语

本文通过凸轮廓线的矢量方程,求解了针齿与凸轮间的相对滑动速度,分析了摩擦力在针齿与凸轮相对滑动时的作用性质,引入摩擦力性质系数,计算了针齿与凸轮间的啮合力,求得了针齿-凸轮副的摩擦损耗,从而得出其啮合效率曲线. 运用拟合方法确定了平均效率与针齿分布圆半径  $R_z$  和偏心距  $e$  之间的解析式. 结果表明:滑动摩擦因数  $\mu$  对针齿-凸轮副啮合效率影响较大,材料的选择及润滑应该引起重视. 平均效率随  $R_z$  的增大而逐渐减小,在满足结构强度及不发生干涉的前提下应尽量减小  $R_z$  的值;平均效率随  $e$  的增大而增大,但出于减小凸轮廓线尖点个数考虑,偏心距不宜选择过小. 平均效率拟合公式可以作为后续建立机构效率优化模型的基础.

#### 参考文献:

[1] Feng Xianying, Fu Zhenshan, Yu Chunling. Meshing efficiency of globoidal indexing cam mechanism with steel ball[J]. Advanced Materials Research, 2011, 413: 414-419.

[2] 曾又娇. 直动滚子从动件凸轮机构效率研究[D]. 秦皇岛:燕山大学,2001.

[3] 姚九成,毕凤琴. 用啮合功率法计算平动齿轮机构效率的局限性[J]. 机械科学与技术, 2003, 22(2): 254-256.

(下转第 71 页)