

DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20140094

## 图的有效符号边控制数

张旭<sup>1</sup>, 陈学刚<sup>1,2</sup>

(1. 华北电力大学数理学院, 北京 102206; 2. 北京工业大学应用数理学院, 北京 100124)

**摘要:** 设  $G=(V, E)$  是一个非空图, 若函数  $f: E \rightarrow \{-1, 1\}$  对  $\forall e \in E(G)$  均有  $\sum_{e' \in N[e]} f(e') = 1$ , 则称  $f$  为图  $G$  的一个有效符号边控制函数. 图  $G$  的有效符号边控制数记为  $r'_{sc}(G)$ , 定义为  $r'_{sc}(G) = \min \{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的一个有效符号边控制函数} \}$ . 在本文中, 我们给出了一般图的有效符号边控制数存在的必要条件和下界, 并且证明了图  $P_m \times C_n$  不存在有效符号边控制函数, 最后给出了立方图的有效符号边控制数存在的充要条件.

**关键词:** 有效符号边控制函数; 有效符号边控制数; 立方图

**中图分类号:** O157.5      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-6510(2015)04-0073-05

## Efficient Signed Edge Domination Number in Graphs

ZHANG Xu<sup>1</sup>, CHEN Xuegang<sup>1,2</sup>

(1. Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

2. College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** Let  $G=(V, E)$  be a graph. A function  $f: E \rightarrow \{-1, 1\}$  is to be an efficient signed edge dominating function of  $G$ , if  $\sum_{e' \in N[e]} f(e') = 1$  holds every edge  $e \in E(G)$ . The efficient signed edge domination number  $r'_{sc}(G)$  of  $G$  is defined as  $r'_{sc}(G) = \min \{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ which is an efficient signed edge dominating function of } G \}$ . This paper firstly gives a necessary condition for the existence of an efficient signed edge domination number and a lower bound on the general graph. Secondly it shows that there is no efficient signed edge dominating function of graph  $P_m \times C_n$ . Finally the sufficient and necessary condition is given for the existence of the efficient signed edge dominating function in a cubic graph.

**Key words:** efficient signed edge dominating function; efficient signed edge domination number; cubic graph

2001年, 徐保根<sup>[1-2]</sup>提出了图的符号边控制概念, 获得了符号边控制数的许多界限, 并将这一概念推广到边上的多种符号控制, 如符号星控制、符号圈控制、符号团控制、符号路控制等等. 关于边控制, 文献[3-9]做出了一些重要结论, 尤其是文献[9], 得到了图的符号边控制数的一个新的下界, 并确定了圆梯  $P_2 \times C_n$  的符号边控制数. 文献[10]主要研究了图的有效减控制和符号控制. 文献涉及到图的有效符号边控制数的研究很少, 本文在参考文献[9]和[10]的基础上, 研究图的有效符号边控制数. 首先考虑非空图  $G$  存在有效符号边控制函数的必要条件和下界, 然后讨论图  $P_m \times C_n$  是否存在有效符号边控制函数, 最后研究

立方图存在有效符号边控制函数的充要条件.

### 1 概念

本文中所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1].

设  $G=(V, E)$  为一个图,  $V=V(G)$  和  $E=E(G)$  分别表示其顶点集和边集. 若  $e \in E$ , 则  $N_G(e)$  表示  $G$  中与  $e$  相邻的边集, 称为  $e$  的边邻域;  $N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}$  称为  $e$  的闭边邻域.  $d_G(e) = |N_G(e)|$  表示  $G$  中与  $e$  相邻的边的条数, 称为  $e$  在  $G$  中的边度. 在

收稿日期: 2014-06-17; 修回日期: 2014-07-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10901051); 北京市博士后工作经费资助项目

作者简介: 张旭(1989—), 女, 河北人, 硕士研究生; 通信作者: 陈学刚, 教授, gxcxdm@163.com.

不引起混淆的情况下,  $N_G[e]$ 、 $N_G(e)$  和  $d_G(e)$  可分别简记为  $N[e]$ 、 $N(e)$  和  $d(e)$ . 若  $e=uv \in E(G)$ , 则  $d(e)=d(u)+d(v)-2$ . 设  $M \subseteq E$ , 若  $M$  中任两边的距离至少为 2, 则称  $M$  为  $G$  的一个导出匹配. 在  $G$  中,  $P_n$  和  $C_n$  分别表示  $n$  个点的路和圈. 假设  $G$  是一个图, 则  $G$  的对偶图  $G'$  的构造方法为: 把  $G$  中的边对应成  $G'$  中的顶点,  $G'$  中的两点相邻当且仅当它们的对应边在  $G$  中相邻.

**定义** 设  $G=(V,E)$  是一个非空图, 若函数  $f: E \rightarrow \{-1,1\}$  对  $\forall e \in E(G)$  均有  $\sum_{e' \in N[e]} f(e')=1$ , 则称  $f$  为图  $G$  的一个有效符号边控制函数. 图  $G$  的有效符号边控制数记为  $r'_{se}(G)$ , 定义为  $r'_{se}(G)=\min \{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ 为图 } G \text{ 的一个有效符号边控制函数} \}$ .

设  $R$  是一个实数集, 对实值函数  $f: E \rightarrow R$  和非空子集  $S \subseteq E(G)$ , 记  $f(S)=\sum_{e \in S} f(e)$ . 为简单起见, 把满足  $f(e)=+1$  的边  $e$  称为  $+1$  边, 把满足  $f(e)=-1$  的边  $e$  称为  $-1$  边.

## 2 主要结果及证明

### 2.1 图的有效符号边控制数存在的必要条件和一个下界

**定理 1** 设  $G=(V,E)$  是一个非空图, 若  $G$  存在一个有效符号边控制函数, 则对  $\forall e \in E(G)$  均有  $d(e) \equiv 0 \pmod{2}$ .

**证明** 设  $f$  为图  $G$  的一个有效符号边控制函数, 且使得  $r'_{se}(G)=f(E)$ . 令  $E_1=\{e \in E(G) \mid f(e)=1\}$ ,  $E_2=\{e \in E(G) \mid f(e)=-1\}$ . 对  $\forall e \in E(G)$ , 若  $e$  邻接  $E_1$  中边的个数为  $s$ , 则  $e$  邻接  $E_2$  中边的个数为  $d(e)-s$ .

由于  $\sum_{e' \in N[e]} f(e')=s-(d(e)-s)+f(e)=1$ , 从而  $s=\frac{1+d(e)-f(e)}{2}$ . 当  $f(e)=1$  时,  $s=\frac{d(e)}{2}$ ; 当  $f(e)=-1$  时,  $s=\frac{d(e)+2}{2}$ . 因为  $s$  为整数, 所以  $d(e) \equiv 0 \pmod{2}$ .

**定理 2** 设  $G$  是一个  $n$  阶连通图,  $m$  为  $G$  的边数, 若  $G$  存在一个有效符号边控制函数, 则有  $r'_{se}(G) \geq \frac{2\delta m}{\Delta+\delta-1} - m$ , 其中  $\Delta$  和  $\delta$  分别为图  $G$  的最大

度和最小度.

**证明** 设  $f$  为图  $G$  的一个有效符号边控制函数, 且使得  $r'_{se}(G)=f(E)$ . 令  $E_1=\{e \in E(G) \mid f(e)=1\}$ ,  $E_2=\{e \in E(G) \mid f(e)=-1\}$ ,  $|E_1|=p$  和  $|E_2|=q$ . 显然  $m=p+q$ . 又由于  $m=\sum_{e \in E} f(N[e])=\sum_{e \in E_1} (d(e)+1)-\sum_{e \in E_2} (d(e)+1)=\sum_{e \in E_1} (d(u)+d(v)-1)-\sum_{e \in E_2} (d(u)+d(v)-1) \leq (2\Delta-1)|E_1|-(2\delta-1)|E_2|=(2\Delta-1)p-(2\delta-1)q=(2\Delta-1)p-(2\delta-1)(m-p)$ . 所以  $p \geq \frac{\delta m}{\Delta+\delta-1}$ . 因此  $r'_{se}(G)=2p-m \geq \frac{2\delta m}{\Delta+\delta-1} - m$ .

**推论 1** 设  $G$  是边  $r$ -正则图,  $m$  为  $G$  的边数, 若  $G$  存在一个有效符号边控制函数, 则  $r'_{se}(G)=\frac{m}{r+1}$ .

**证明** 由定理 2 的证明过程可知

$$m=\sum_{e \in E} f(N[e])=\sum_{e \in E_1} (d(e)+1)-\sum_{e \in E_2} (d(e)+1)=\sum_{e \in E_1} (r+1)-\sum_{e \in E_2} (r+1)=(|E_1|-|E_2|)(r+1)$$

所以

$$r'_{se}(G)=|E_1|-|E_2|=\frac{m}{r+1}$$

**推论 2**  $n$  阶圈  $C_n$  存在有效符号边控制函数  $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$ .

### 2.2 图 $P_m \times C_n$ 的有效符号边控制函数的研究

参考文献[9]的定理 2 主要研究了圆梯  $P_2 \times C_n$  的符号边控制数, 下面讨论图  $P_m \times C_n$  的有效符号边控制函数的存在性.

**定理 3** 设  $G=P_m \times C_n$  ( $m \geq 2, n \geq 3$ ), 则图  $G$  中不存在有效符号边控制函数.

**证明** (1) 当  $G=P_m \times C_n$  ( $m \geq 3, n \geq 3$ ) 时, 给  $G$  标号  $\{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}; u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}; \dots; u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{mn}\}$ , 如图 1 所示.

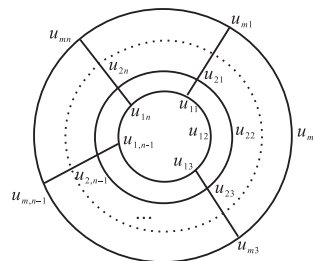


图 1  $G=P_m \times C_n$   
Fig. 1  $G=P_m \times C_n$

容易看出,  $d(u_{1i}, u_{2i})=5$  为奇数, 其中  $i=1, 2, \dots, n$ . 所以, 由定理 1 可得图  $G$  中不存在有效符号边控制函数.

(2) 当  $G = P_2 \times C_n$  ( $n \geq 3$ ) 时, 给  $G$  标号为  $\{u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 可以看出  $d(e) = 4$  ( $\forall e \in E(G)$ ), 如图 2 所示. 采用反证法来证明.

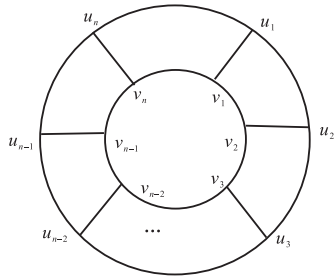


图 2  $G = P_2 \times C_n$   
Fig. 2  $G = P_2 \times C_n$

假设图  $G$  中存在有效符号边控制函数, 下面分 3 种情况来讨论.

情况 1  $f(u_{i-1}v_{i-1}) = f(u_i v_i) = -1$ , 如图 3 所示.

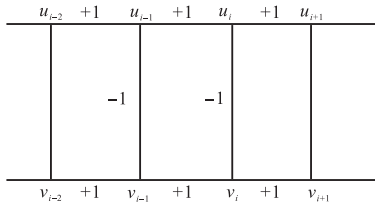


图 3 情况 1  
Fig. 3 Situation 1

由  $\sum_{e' \in N[u_{i-1}u_i]} f(e') = 1$  得  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = f(u_{i-1}u_i) = f(u_i u_{i+1}) = +1$ .

由  $\sum_{e' \in N[v_{i-1}v_i]} f(e') = 1$  得  $f(v_{i-2}v_{i-1}) = f(v_{i-1}v_i) = f(v_i v_{i+1}) = +1$ . 此时,  $\sum_{e' \in N[u_i v_i]} f(e') = 3 > 1$ , 矛盾, 所以假设不成立.

情况 2  $f(u_{i-1}v_{i-1}) = f(u_i v_i) = +1$ , 如图 4 所示.

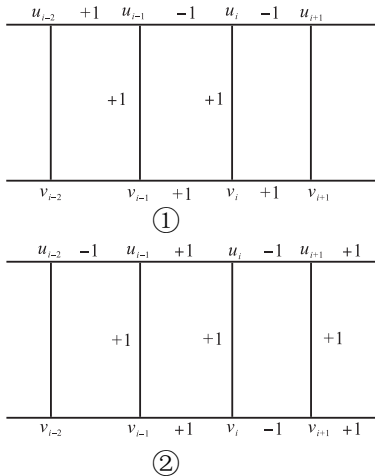


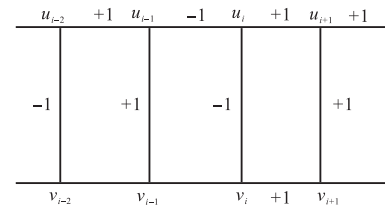
图 4 情况 2  
Fig. 4 Situation 2

① 当  $f(u_{i-1}u_i) = -1$  时, 由  $\sum_{e' \in N[u_{i-1}u_i]} f(e') = 1$  得  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = +1$  且  $f(u_i u_{i+1}) = -1$  或  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = -1$  且  $f(u_i u_{i+1}) = +1$ . 不失一般性, 假设  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = +1$ ,  $f(u_i u_{i+1}) = -1$ . 由  $\sum_{e' \in N[u_i v_i]} f(e') = 1$  得  $f(v_{i-1}v_i) = f(v_i v_{i+1}) = +1$ , 此时  $\sum_{e' \in N[v_{i-1}v_i]} f(e') > 1$ , 矛盾.

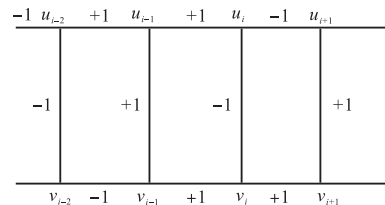
② 当  $f(u_{i-1}u_i) = +1$  时, 则  $f(v_{i-1}v_i) = +1$  (否则同上, 矛盾). 因为  $\sum_{e' \in N[u_{i-1}u_i]} f(e') = 1$ , 所以  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = f(u_i u_{i+1}) = -1$ . 由  $\sum_{e' \in N[u_i v_i]} f(e') = 1$  得  $f(v_i v_{i+1}) = -1$ . 又由  $\sum_{e' \in N[u_{i+1}v_{i+1}]} f(e') = 1$  得  $f(u_{i+1}v_{i+1}) = f(u_{i+1}u_{i+2}) = f(v_{i+1}v_{i+2}) = +1$ , 此时  $\sum_{e' \in N[v_i v_{i+1}]} f(e') > 1$ , 矛盾.

所以, 假设不成立.

情况 3  $f(u_{i-1}v_{i-1}) = +1, f(u_i v_i) = -1$ , 如图 5 所示.



①



②

图 5 情况 3  
Fig. 5 Situation 3

由情况 1 和情况 2 知  $f(u_{i-2}v_{i-2}) = -1$ ,  $f(u_{i+1}v_{i+1}) = +1$ .

① 当  $f(u_{i-1}u_i) = -1$  时, 由  $\sum_{e' \in N[u_{i-1}u_i]} f(e') = 1$  得  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = f(u_i u_{i+1}) = +1$ . 又由  $\sum_{e' \in N[u_i v_i]} f(e') = 1$  得  $f(v_i v_{i+1}) = +1$ . 因为  $\sum_{e' \in N[u_{i+1}v_{i+1}]} f(e') = 1$ , 所以  $f(u_{i+1}u_{i+2}) = +1$ . 此时  $\sum_{e' \in N[u_{i+1}v_{i+1}]} f(e') > 1$ , 矛盾.

② 当  $f(u_{i-1}u_i) = +1$  时, 由  $\sum_{e' \in N[u_{i-1}u_i]} f(e') = 1$  得  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = +1$  且  $f(u_i u_{i+1}) = -1$  或  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = -1$  且

$f(u_i u_{i+1}) = +1$ . 不失一般性, 假设  $f(u_{i-2} u_{i-1}) = +1$ ,  $f(u_i u_{i+1}) = -1$ . 因为  $\sum_{e' \in N[u_i v_i]} f(e') = 1$ , 所以  $f(v_{i-1} v_i) = f(v_i v_{i+1}) = +1$ . 由  $\sum_{e' \in N[v_{i-1} v_i]} f(e') = 1$  得  $f(v_{i-2} v_{i-1}) = -1$ . 又由  $\sum_{e' \in N[u_{i-2} u_{i-1}]} f(e') = 1$  得  $f(u_{i-3} u_{i-2}) = -1$ , 此时  $\sum_{e' \in N[u_{i-2} u_{i-1}]} f(e') < 1$ , 矛盾. 所以假设不成立.

综上, 定理 3 成立.

### 2.3 立方图的有效符号边控制数

由定理 3, 不是每个图都存在有效符号边控制函数, 下面讨论具有什么结构的立方图存在有效符号边控制函数.

**引理 1** Petersen 图的有效符号边控制数存在且  $r'_{se}(G) = 3$ .

**证明** 对 Petersen 图  $G$  的顶点标号为  $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ , 如图 6 所示. 定义 Petersen 图的有效符号边控制函数  $f$  如下:  $f(v_1 v_5) = f(v_3 v_4) = f(v_3 v_8) = f(v_1 v_6) = f(v_7 v_9) = f(v_7 v_{10}) = -1$ , 其他各边的函数值都为  $+1$ . 此时对  $\forall e \in E(G)$  都有  $\sum_{e' \in N[e]} f(e') = 1$ . 所以 Petersen 图存在有效符号边控制函数. 因为  $\forall e \in E(G)$  都有  $d(e) = 4$ , 所以 Petersen 图是一个边 4-正则图. 根据推论 1 可得  $r'_{se}(G) = \frac{m}{r+1} = 3$ .

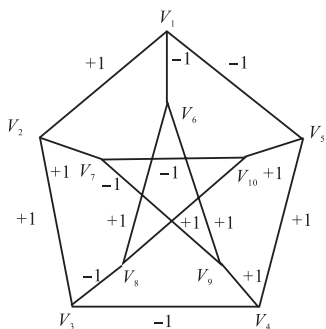


图 6 Petersen 图  
Fig. 6 Petersen Graph

下面给出立方图  $G$  存在有效符号边控制函数的充要条件.

**定理 4** 设  $G$  是一个立方图,  $G' = (V', E')$  是  $G$  的对偶图, 则  $G$  存在有效符号边控制函数的充要条件为  $G'$  中存在一个导出匹配  $M$ , 使得  $G'[V' - V'(M)]$  是圈的并.

**证明** 因为  $G'$  中存在一个导出匹配  $M$ , 使得

$G'[V' - V'(M)]$  是圈的并. 定义函数  $f: V' \rightarrow \{-1, 1\}$  如下:

$$f(v) = \begin{cases} -1, & \forall v \in M \\ +1, & \forall v \in V' - V'(M) \end{cases}$$

易证  $f$  为  $G'$  的一个有效符号边控制函数, 所以  $G$  存在有效符号边控制函数.

若立方图存在有效符号边控制函数, 则  $G$  的对偶图  $G'$  就存在有效符号边控制函数, 即对  $\forall v \in V(G')$  均有  $\sum_{v' \in N[v]} f(v') = 1$ . 又  $|N[v]| = 5$ , 所以  $N[v]$  中有 2 个点标号为  $-1$ , 3 个点标号为  $+1$ . 对每个  $-1$  点来说, 有且只有一个  $-1$  点与之相邻. 对每个  $+1$  点来说, 有 2 个  $+1$  点相邻. 设  $S_1$  是标号为  $-1$  的顶点的集合,  $S_2$  是标号为  $+1$  的顶点的集合, 则  $G'[S_1]$  是  $G'$  的一个导出匹配, 记作  $M$ . 因为  $S_2$  中每点在  $G'[S_2]$  中的度均为 2, 所以  $G'[S_2]$  为圈的并. 因此,  $G'$  中存在一个导出匹配  $M$  使得  $G'[V' - V'(M)]$  是圈的并.

### 3 结 语

首先, 本文给出了非空图  $G$  存在有效符号边控制函数的必要条件和一个下界, 然后证明了图  $P_m \times C_n$  不存在有效符号边控制函数, 最后给出了立方图存在有效符号边控制函数的充要条件. 目前很多文献都是关于图的有效边控制和符号边控制的, 本文与这些文献相比, 有了一个新的研究方向, 得出了立方图存在有效符号边控制函数的充要条件, 这为进一步寻求算法来解决立方图有效符号边控制问题提供了帮助. 此外, 可以考虑其他图类上存在有效符号边控制函数的充要条件及相关算法, 使图的有效符号边控制问题的研究更加广泛.

#### 参考文献:

- [1] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [2] Xu B G. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2001, 239(1/2/3): 179-189.
- [3] Xu B G. On edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2005, 294(3): 311-326.
- [4] 徐保根. 关于图的符号边全控制数[J]. 华东交通大学学报, 2006, 23(2): 129-131.
- [5] Xu B G. On signed edge domination of graphs[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2007, 27(1): 7-12.

- [6] 徐保根. 关于图的减控制与符号控制[J]. 数学研究与评论, 2003, 23(4): 586-590.
- [7] 赵金凤, 徐保根. 关于图的符号边控制数的下界[J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2010, 34(1): 27-29.
- [8] 赵凌琪, 王丽, 吉日木图. 关于正则图的符号边控制数[J]. 内蒙古民族大学学报, 2010, 25(2): 130-132.
- [9] 徐保根, 张亚琼, 汤友良. 关于图的符号边控制数的一些结论[J]. 河南科技大学学报:自然科学版, 2012, 33(4): 74-77.
- [10] Lu C L, Peng S L, Tang C Y. Efficient minus and signed domination in graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2003, 301(1/2/3): 381-397.

责任编辑:周建军

(上接第24页)

- [8] Lahmi R, Sendersky E, Perelman A, et al. Alanine dehydrogenase activity is required for adequate progression of phycobilisome degradation during nitrogen starvation in *Synechococcus elongatus* PCC 7942[J]. Journal of Bacteriology, 2006, 188(14): 5258-5265.
- [9] Baker P J, Sawa Y, Shibata H, et al. Analysis of the structure and substrate binding of *Phormidium lapideum* alanine dehydrogenase[J]. Nature Structural & Molecular Biology, 1998, 5(7): 561-567.
- [10] Smith N, Mayhew M, Robinson H, et al. Crystallization and phasing of alanine dehydrogenase from *Archaeglobus fulgidus*[J]. Acta Crystallographica Section D: Biological Crystallography, 2003, 59(12): 2328-2331.
- [11] Kuroda S, Tanizawa K, Tanaka H. Alanine dehydrogenases from two *Bacillus* species with distinct thermostabilities: Molecular cloning, DNA and protein sequence determination, and structural comparison with other NAD(P)<sup>+</sup>-dependent dehydrogenases[J]. Biochemistry, 1990, 29(4): 1009-1015.
- [12] 李欣欣, 徐晓冬, 丹媛媛, 等. 蛋白质结晶的研究进展[J]. 生物技术通报, 2007(6): 44-47.

责任编辑:郎婧

(上接第72页)

在分析现有最近邻法基础上,采用 MapReduce 思想对算法进行改进,使得案例的检索过程可以在不同的服务器上并行进行,从而提高检索速度.由于开源的 Hadoop 平台将案例库存储在 HDFS 文件系统上,减少不同平台间的差异,弱化了物理位置对系统的影响,可以实现资源的均衡调度.同时,由于案例库会在不同的服务器上备份,也保证了数据的安全性.

实验表明:对大数据量的数据进行检索时,本文提出的基于云平台的案例检索技术可以明显提高检索速度,随着节点的增加,案例的检索速度加快,且需处理的数据量越大,这种效果表现的越明显.

#### 参考文献:

- [1] 刘枫. 基于 Google 云计算的 Web 应用与开发[J]. 电脑开发与应用, 2011(5): 29-31, 34.
- [2] 罗军舟, 金嘉晖, 宋爱波, 等. 云计算:体系架构与关键技术[J]. 通信学报, 2011, 32(7): 3-21.
- [3] 倪志伟, 李建洋, 李锋刚, 等. 案例决策技术及案例决策支持系统研究综述[J]. 计算机科学, 2009, 36(11): 18-23, 42.
- [4] 侯玉梅, 许成媛. 基于案例推理法研究综述[J]. 燕山大学学报:哲学社会科学版, 2011, 12(4): 102-108.
- [5] Venner J. Pro Hadoop[M]. New York: Apress, 2009.
- [6] 杨立, 左春, 王裕国. 基于语义距离的 K-最近邻分类方法[J]. 软件学报, 2005, 16(12): 2054-2062.
- [7] Dean J, Ghemawat S. MapReduce: simplified data processing on large clusters[J]. Communications of the ACM, 2008, 51(1): 107-113.
- [8] 李成华, 张新访, 金海, 等. MapReduce: 新型的分布式并行计算编程模型[J]. 计算机工程与科学, 2011, 33(3): 129-135.

责任编辑:常涛