第30卷 第2期
2015年4月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol. 30 No. 2
Apr. 2015

DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20140072

图的给定匹配数的离心率距离和

安明强，孙明晶，刘寅立，孟祥波
（天津科技大学理学院，天津 300457）

摘　要：针对可预测生物和物理性质的图的不变量——离心率距离和，采用 Tutte-Berge 公式及图的转化方法，给出了图的给定匹配数的离心率距离和的紧下界，且完全确定了其极值图.

关键词：离心率距离和；匹配数；极值图

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6510（2015）02-0075-03

Eccentric Distance Sum of Graphs with a Given Matching Number

AN Mingqiang，SUN Mingjing，LIU Yinli，MENG Xiangbo
（College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China）

Abstract：Aimed at a novel graph invariant for predicting biological and physical properties named eccentric distance sum，by using the Tutte-Berge formula and the method of graph transformation，sharp lower bound for the eccentric distance sum of graphs with a given matching number，and the extremal graphs were successully determined.

Key words：eccentric distance sum；matching number；extremal graphs

令 G 是一个顶点集为 $V(G)$ 的简单连通图. 称 $|V(G)|$ 为 G 的阶. 对顶点 $v\in V(G)$, $\deg(v)$ 表示 v 的度. 对顶点 $u,v\in V(G)$，距离 $d(u,v)$ 表示 u 和 v 在 G 中最短路的长度. 顶点 v 的离心率 $\varepsilon(v)$ 表示 v 到任一其他顶点的最大距离. 图 G 的直径 $d(G)$ 是 G 中所有顶点离心率的最大值. 令 S_n 和 K_n 分别表示有 n 个顶点的星和完全图.

Wiener 指标定义为对所有无序顶点对之间距离的求和[1]：

$$W(G)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v)$$

它被认为是与分子化合物的许多物理和化学指标高度相关的最有用的拓扑指标之一.

1997 年，Sharma 等[2]引进了 1 个基于距离的分子结构描述量，被称为离心率连通性指标（ECI），定义为

$$\xi^c(G)=\sum_{v\in V(G)}\varepsilon(v)\deg(v)$$

$\xi^c(G)$ 指标被成功应用在不同性质的生物活性的数学模型上[2].

2002 年，Gupta 等[3]提出了 1 个新奇的预测生物和物理性质的图的不变量——离心率距离和. 他们证明了对一些构造活动和定量结构性质的研究，使用离心率距离和所得的值比使用 Wiener 指标要好. 离心率距离和（EDS）定义为

$$\xi^{ds}(G)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)}\big(\varepsilon(u)+\varepsilon(v)\big)d(u,v)$$

图 G 的匹配数 $\beta(G)$ 是 G 的 1 个最大匹配中的边的数目. 显然，$\beta(G)=0$ 当且仅当 G 是空图（没有边的图）. 对 1 个阶为 $n\geqslant 2$ 的连通图 G，$\beta(G)=1$ 当且仅当 $G=S_n$ 或 $G=K_3$. 若 $\beta(G)=\dfrac{n}{2}$，则 G 有 1 个完美匹配.

如果图的 1 个连通分支含有偶（或奇）数个顶点，那么称这个连通分支是偶（或奇）的. 令 G 是 1 个有 n 个顶点的图，且 $o(G)$ 表示 G 中奇分支的个数. 由 Tutte-Berge 公式[4]，有

$$n-2\beta(G)=\max\big\{o(G-X)-|X|:X\subseteq V(G)\big\} \qquad (1)$$

收稿日期：2014–05–12；**修回日期**：2014–08–29
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11001197）
作者简介：安明强（1982—），男，甘肃天水人，讲师，anmq@tust.edu.cn.

图 G 和 H 的顶点不交的并，记作 $G \cup H$．令 $G \vee H$ 表示在 $G \cup H$ 中通过从 G 中的顶点向 H 中的顶点连接所有可能的边而所得的图，即

$$G \vee H = \overline{\overline{G} \cup \overline{H}}$$

因为在图中添加新边会降低一些距离，所以有：

引理 1　令 G 是非–完全连通图，则对任意一条边 $e \in \overline{G}$，$\xi^{ds}(G) > \xi^{ds}(G+e)$．

Feng 等[5]研究了在阶为 n 且匹配数是 β 的所有图中有最大谱半径的极值图．Zhou 等[6]确定了连通图的与顶点数及匹配数相关的最小 Kirchhoff 指标．2010 年，Feng 等[7]给出了图的给定匹配数的 Zagreb 指标、Harary 指标和超 Wiener 指标的紧上(下)界，且确定了它们的极值图．2011 年，Yu 等[8]研究了给定围长的单圈图的离心率距离和，且刻画了最小和次最小离心率距离和的极值图．此外，他们还刻画了给定直径的一类树的最小和次最小离心率距离和的极值树．但是，对于图的给定匹配数的离心率距离和的极值图研究目前还没有结果．

本文解决了这个问题，给出了给定匹配数的离心率距离和的紧上界，且完全确定了其极值图．对离心率距离和的进一步研究具有一定的理论意义．文中未加述及的术语和符号参见文献[9]．

定理 1　设 G 是一个阶为 $n \geqslant 4$ 且匹配数为 β 的连通图，$2 \leqslant \beta \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$．令 $b = \frac{5n-1}{10}$，则以下成立：

(1) 若 $\beta = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，则 $\xi^{ds}(G) \geqslant n(n-1)$，等式成立当且仅当 $G \cong K_n$；

(2) 若 $b < \beta \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$，则 $\xi^{ds}(G) \geqslant 4n^2 - 9n - 8\beta^2 + 12\beta + 1$ 等式成立当且仅当 $G \cong K_1 \vee (K_{2\beta-1} \cup \overline{K_{n-2\beta}})$；

(3) 若 $2 \leqslant \beta < b$，则 $\xi^{ds}(G) \geqslant 4n^2 - 5n\beta - 4n + 2\beta^2 + 3\beta$，等式成立当且仅当 $G \cong K_\beta \vee \overline{K_{n-\beta}}$；

(4) 若 $\beta = b$，则 $\xi^{ds}(G) \geqslant 4n^2 - 9n - 8\beta^2 + 12\beta + 1 = 4n^2 - 5n\beta - 4n + 2\beta^2 + 3\beta$，等式成立当且仅当 $G \cong K_1 \vee (K_{2\beta-1} \cup \overline{K_{n-2\beta}})$，或 $G \cong K_\beta \vee \overline{K_{n-\beta}}$．

证明：令 G_0 是所有阶为 n 且匹配数为 β 的连通图中离心率距离和最小的图．由式(1)的 Tutte-Berge 公式，存在顶点集 $X_0 \subseteq V(G_0)$ 使得

$$n - 2\beta(G) = \max\{o(G_0 - X) - |X| : X \subseteq V(G_0)\} = o(G_0 - X_0) - |X_0|$$

为方便起见，令 $|X_0| = s$ 且 $o(G_0 - X_0) = t$，则 $n - 2\beta = t - s$．

假设 $s = 0$，则有 $G_0 - X_0 = G_0$，且 $n - 2\beta = t \leqslant 1$．若 $t = 0$，则 $\beta = \frac{n}{2}$；若 $t = 1$，则 $\beta = \frac{n-1}{2}$．由这两种情形，根据引理 1，$G_0 = K_n$，从而 $\xi^{ds}(G) = n(n-1)$．

以下假设 $s \geqslant 1$，从而 $t \geqslant 1$．令 $G_1, G_2, \cdots, G_t$ 是 $G_0 - X_0$ 的所有奇分支．若 $G_0 - X_0$ 有一个偶分支，则在 G_0 中通过添加一条连接 $G_0 - X_0$ 的偶分支的一个顶点和奇分支的一个顶点的边，得到一个图 $\hat{G}$，满足 $n - 2\beta(\hat{G}) \geqslant o(\hat{G} - X_0) - |X_0| = o(G_0 - X_0) - |X_0|$．从而有 $\beta(\hat{G}) = \beta$，且由引理 1，$\hat{G}$ 的离心率距离和比 G_0 小，矛盾．因此，$G_0 - X_0$ 不含有任何偶分支．类似地，$G_1, G_2, \cdots, G_t$ 及由 X_0 导出的子图都是完全图，且 $G_1, G_2, \cdots, G_t$ 中的任一顶点邻接于 X_0 的每一个顶点．令 $n_i = |V(G_i)|$，$i = 1, 2, \cdots, t$，则

$$G_0 = K_s \vee \left(K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t}\right)$$

注意到，G_0 的直径是 2，从而

$$\begin{aligned}\xi^{ds}(G_0) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G_0)} \left(\varepsilon_{G_0}(u) + \varepsilon_{G_0}(v)\right) d_{G_0}(u,v) = \\ &\sum_{\{u,v\} \subseteq K_s} [1+1] \cdot 1 + \sum_{i=1}^{t} \sum_{\{u,v\} \subseteq K_{n_i}} [2+2] \cdot 1 + \\ &\sum_{i=1}^{t} \sum_{u \in K_s, v \in K_{n_i}} [1+2] \cdot 1 + \sum_{\substack{u \in K_{n_i}, v \in K_{n_j} \\ (i \neq j)}} [2+2] \cdot 2 = \\ &s(s-1) + (3s-2)(n-s) + 8 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant t} \sum n_i n_j + \\ &2 \sum_{i=1}^{t} n_i^2 \end{aligned} \tag{2}$$

当 $\sum_{i=1}^{t} n_i = n - s$ 且 $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_t$ 时，$8 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant t} \sum n_i n_j + 2 \sum_{i=1}^{t} n_i^2$ 取得最小值当且仅当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_{t-1} = 1$，且 $n_t = n - s - t + 1 = 2\beta - 2s + 1$．

从而

$$G_0 = K_s \vee \left(K_{2\beta-2s+1} \cup \overline{K_{n+s-2\beta-1}}\right)$$

因此，式(2)可改写为

$$\begin{aligned}\xi^{ds}(G_0) &= s(s-1) + (3s-2)(n-s) + \\ &8\left[\frac{(t-2)(t-1)}{2} + (t-1)n_t\right] + \\ &2\left[(t-1) + (n-s-t+1)^2\right] = \\ &2(2\beta-2s+1)^2 + (3s-2)(n-s) + s(s-1) + \\ &2(n-2\beta+s-1) + 8(n-2\beta+s-1) \cdot \\ &(2\beta-2s+1) + 4(n-2\beta+s-2) \cdot \end{aligned}$$

$$(n-2\beta+s-1)=-6s^2+(16\beta+7-5n)s+(4n^2-4n-4\beta-8\beta^2)$$

令 $g(s)=-6s^2+(16\beta+7-5n)s+(4n^2-4n-4\beta-8\beta^2)$，注意到 $s\geqslant 1$ 且 $t-s=n-2\beta\geqslant s+t-2\beta$，因此就有 $s\leqslant\beta$，从而 $1\leqslant s\leqslant\beta\leqslant\frac{n}{2}$. 显然，当 $s=1$ 或 $s=\beta$ 时，作为 s 的函数，$g(s)$ 取得它的最小值.

$$g(1)=1+4n^2-9n-8\beta^2+12\beta$$

$$g(\beta)=2\beta^2+3\beta-5n\beta+4n^2-4n$$

由于 $\beta\geqslant 2$，有 $g(1)-g(\beta)=1-5n-10\beta^2+9\beta+5n\beta$. 令 b 是二次方程 $-10\beta^2+(5n+9)\beta+1-5n=0$ 的一个较大的根，则

$$b=\frac{5n-1}{10}$$

因此，若 $\beta\leqslant b$，则 $g(1)\leqslant g(\beta)$；而当 $\beta\geqslant b$，则 $g(\beta)\leqslant g(1)$. 证毕.

参考文献：

[1] Wiener H. Structural determination of paraffin boiling point[J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69(1): 17–20.

[2] Sharma V, Goswami R, Madan A K. Eccentric connectivity index: A novel highly discriminating topological descriptor for structure property and structure activity studies[J]. Journal of Chemical Information and Computer Science, 1997, 37(2): 273–282.

[3] Gupta S, Singh M, Madan A K. Eccentric distance sum: A novel graph invariant for predicting biological and physical properties[J]. Journal of Mathmatical Analysis and Applications, 2002, 275(1): 386–401.

[4] Lovász L, Plummer M D. Matching Theory[M]. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1986.

[5] Feng L H, Yu G H, Zhang X D. Spectral radius of graphs with given matching number[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 422(1): 133–138.

[6] Zhou B, Trinajstic N. The Kirchhoff index and the matching number[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2009, 109(13): 2978–2981.

[7] Feng L H, Ilic A. Zagreb, Harary and hyper-Wiener indices of graphs with given matching number[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(8): 943–948.

[8] Yu G H, Feng L H, Ilic A. On the eccentric distance sum of trees and unicyclic graphs[J]. Journal of Mathmatical Analysis and Applications, 2011, 375(1): 99–107.

[9] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: Macmillan Press Ltd, 1976.

责任编辑：常涛