第 30 卷 第 2 期
2015 年 4 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol. 30 No. 2
Apr. 2015

DOI:10.13364/j.issn.1672-6510.20140106

基于敏感传递函数的分数阶 PI^{λ} 控制器的参数整定

杨征颖，王德进，史万祺
（天津科技大学电子信息与自动化学院，天津 300222）

摘　要：讨论一种基于敏感传递函数的分数阶 PI^{λ} 控制器的参数整定方法. 根据敏感传递函数的定义，采用代数方法，对固定的 PI^{λ} 控制器的积分阶次，在比例增益和积分增益参数平面上，按敏感传递函数的界进行 PI^{λ} 控制器的参数整定. 该敏感传递函数的界与系统的幅值裕度和相角裕度直接相关，给出了系统相对稳定性的信息. 仿真实例表明，利用该方法设计的 PI^{λ} 控制器具有良好的动态性能和鲁棒性.

关键词：分数阶 PI^{λ} 控制器；敏感传递函数；参数整定
中图分类号：TP273　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6510（2015）02-0057-03

Parameter Tuning of Fractional-order PI^{λ} Controllers Based on Sensitivity Constraint

YANG Zhengying，WANG Dejin，SHI Wanqi
（College of Electronic Information and Automation，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300222，China）

Abstract：This paper discusses the parameter tuning method of fractional-order PI^{λ} controllers based on sensitivity transfer function constraint. According to the definition of sensitivity transfer function，in the plane of proportional-integral gains of PI^{λ} controller，for fixed integral-order，the parameters of the controller are tuned by plotting the sensitivity bound obtained via an algebraic derivation. The bound of sensitivity transfer function is directly related to the gain-margin and the phase-margin of the system，which gives the information on the relative stability of the system. Simulation examples prove that the designed PI^{λ} controller can achieve better dynamic performances and robustness.

Key words：fractional-order PI^{λ} controllers；sensitivity transfer functions；parameter tuning

分数阶控制系统的相关研究近年来受到广泛的关注[1–2]，特别是分数阶 PID 控制器的研究[3–5]具有明显的工程实际意义. 众所周知，常规（整数阶）PID 控制器在工业过程控制领域获得了广泛应用. 采用分数阶 PID 控制器，由于增加了设计的自由度，可以取得比整数阶 PID 更好的动态性能和对参数变化的鲁棒性. 幅值裕度和相角裕度作为相对稳定性的度量，在经典控制理论中已进行了大量的讨论. 相角裕度与时域动态性能（超调量）直接相关，而幅值裕度则反映系统对参数变化的鲁棒性.

本文讨论基于敏感传递函数的分数阶 PI^{λ} 控制器的参数整定方法. 该敏感传递函数的界给出了幅值裕度和相角裕度的信息. 通过一种代数方法求解 PI^{λ} 控制器的参数，并用仿真实例进行验证.

1　敏感传递函数

考虑图 1 所示 SISO 单位反馈系统，其中 $G(s)$ 为被控对象，$C(s)$ 为控制器，$R(s)$ 为参考输入，$Y(s)$ 为输出，$E(s)$ 为跟踪误差. 敏感传递函数 $S(s)$ 定义为

$$S(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+C(s)G(s)} \tag{1}$$

它代表系统对参考输入信号的跟踪精度. 考虑频率特性 $S(\mathrm{j}\omega)$ 的最大值

$$M_s=\max_{\omega}\left|\frac{1}{1+C(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)}\right| \tag{2}$$

收稿日期：2014–07–11；**修回日期**：2014–09–17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60874028）
作者简介：杨征颖（1988—），女，河北廊坊人，硕士研究生；**通信作者**：王德进，教授，wdejin56@sina.com.

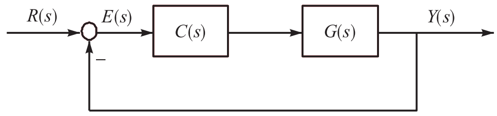

图 1　单位反馈系统

Fig. 1　Unity feedback system

其物理意义是，开环 Nyquist 曲线到系统临界稳定点（－1，j0）的最短距离的倒数，典型取值范围为（1，2）[6]．进一步，文献[7]将式（2）的极大化问题转换为在整个频率范围内对敏感传递函数进行约束

$$\left|\frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)}\right| \leqslant M, \forall\omega \geqslant 0 \tag{3}$$

式中 $M>1$．根据这一条件，当 $M\to\infty$ 时，式（3）成为闭环特征方程

$$1+C(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)=0 \tag{4}$$

事实上，式（3）的敏感传递函数不等式约束与系统的幅值裕度和相角裕度直接相关[7]：

$$GM = 20\lg K + 20\lg\frac{M}{M-1} \tag{5}$$

$$PM = 2\arcsin\frac{1}{2M} \tag{6}$$

式中 $K\geqslant 1$ 为系统的开环增益．因此，式（3）不等式是对系统鲁棒性的一种比幅值裕度和相角裕度更强的度量，因为它不只是在 2 个穿越频率（相角穿越频率和幅值穿越频率）处对敏感传递函数进行界定，而是在所有频率处对其进行约束．

2　控制器参数整定

设图 1 中被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{-Ls} \tag{7}$$

式中：$D(s)$ 和 $N(s)$ 为整数阶或分数阶多项式；$L\geqslant 0$ 为时滞因子．控制器为如下分数阶 PI^{λ} 形式

$$C(s)=k_{\mathrm{p}}+\frac{k_{\mathrm{i}}}{s^{\lambda}} \tag{8}$$

式中：k_{p} 和 k_{i} 分别为比例增益和积分增益；$0<\lambda<2$ 为积分阶次．为设计方便，对式（8）的控制器进行如下变换

$$C(s)=k_{\mathrm{p}}+\frac{k_{\mathrm{i}}}{s^{\lambda}}=x(1+\frac{y}{s^{\lambda}}) \tag{9}$$

式中：$x=k_{\mathrm{p}}$；$y=\dfrac{k_{\mathrm{i}}}{k_{\mathrm{p}}}$．则开环传递函数为

$$L(s)=C(s)G(s)=x(1+\frac{y}{s^{\lambda}})\ G(s)=x[G(s)+yG_1(s)] \tag{10}$$

式中 $G_1(s)=\dfrac{G(s)}{s^{\lambda}}$．令 $s=\mathrm{j}\omega$，分解得

$$G(\mathrm{j}\omega)=A(\omega)+\mathrm{j}B(\omega)$$
$$G_1(\mathrm{j}\omega)=A_1(\omega)+\mathrm{j}B_1(\omega)$$

代入式（10），有

$$L(\mathrm{j}\omega)=C(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)=x[G(\mathrm{j}\omega)+yG_1(\mathrm{j}\omega)]= x(A+yA_1)+\mathrm{j}[x(B+yB_1)] \tag{11}$$

由式（3）可得

$$\left|1+C(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)\right|^2 \geqslant \frac{1}{M^2}$$

定义函数

$$f_1(\omega)=\left|1+C(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)\right|^2-M_1 \tag{12}$$

式中 $M_1=1/M^2$．再由式（11），$f_1(\omega)$ 可写为

$$f_1(\omega)=C+2xD+x^2E\geqslant 0 \tag{13}$$

其中

$$C=1-M_1$$
$$D=A+yA_1$$
$$E=A^2+B^2+2(AA_1+BB_1)y+(A_1^2+B_1^2)y^2$$

式（13）定义了一个极值问题，当在某一频率下，等号成立时，$f_1(\omega)$ 达到极小值．由极值条件可得

$$f_2(w)=\frac{\mathrm{d}f_1(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=2(xD_1+x^2E_1)=0 \tag{14}$$

其中

$$D_1=\dot{A}+y\dot{A}_1$$
$$E_1=A\dot{A}+B\dot{B}+(A\dot{A}_1+\dot{A}A_1+B\dot{B}_1+\dot{B}B_1)y+ (A_1\dot{A}_1+B_1\dot{B}_1)y^2$$

联立求解方程组

$$\begin{cases} f_1(\omega)=0 \\ f_2(\omega)=0 \end{cases}$$

消去 x^2 后，得到

$$x=\frac{CE_1}{D_1E-2DE_1}=\frac{C(a_0+a_1y+a_2y^2)}{b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3} \tag{15}$$

其中

$$a_0=A\dot{A}+B\dot{B}$$
$$a_1=A\dot{A}_1+A_1\dot{A}+B\dot{B}_1+B_1\dot{B}$$
$$a_2=A_1\dot{A}_1+B_1\dot{B}_1$$
$$b_0=\dot{A}(A^2+B^2)-2A(A\dot{A}+B\dot{B})$$
$$b_1=2\dot{A}(AA_1+BB_1)+\dot{A}_1(A^2+B^2)-2A(A\dot{A}_1+ A_1\dot{A}+B\dot{B}_1+B_1\dot{B})-2A_1(A\dot{A}+B\dot{B})$$
$$b_2=\dot{A}(A_1^2+B_1^2)+2\dot{A}_1(AA_1+BB_1)-2A(A_1\dot{A}_1+$$

$$B_1\dot{B}_1) - 2A_1(A\dot{A}_1 + A_1\dot{A} + B\dot{B}_1 + B_1\dot{B})$$

$$b_3 = \dot{A}_1(A_1^2 + B_1^2) - 2A_1(A_1\dot{A}_1 + B_1\dot{B}_1)$$

将式(15)代入式(13)中的 $f_1(\omega)=0$，整理得关于参数 y 的 6 次方程

$$d_0 + d_1 y + d_2 y^2 + d_3 y^3 + d_4 y^4 + d_5 y^5 + d_6 y^6 = 0 \tag{16}$$

其中

$$d_0 = b_0^2 + 2Aa_0 b_0 + Ca_0^2(A^2 + B^2)$$

$$d_1 = 2b_0 b_1 + 2(a_0 b_1 A + a_0 b_0 A_1 + a_1 b_0 A) + 2a_0 C[a_0(AA_1 + BB_1) + a_1(A^2 + B^2)]$$

$$d_2 = (b_1^2 + 2b_0 b_2) + 2(a_0 b_2 A + b_1 a_1 A + Aa_2 b_0 + a_0 b_1 A_1 + a_1 b_0 A_1) + C[a_0^2(A_1^2 + B_1^2) + a_1^2(A^2 + B^2) + 4a_0 a_1(AA_1 + BB_1) + 2a_0 a_2(A^2 + B^2)]$$

$$d_3 = 2(b_0 b_3 + b_1 b_2) + 2(a_0 b_3 A + a_1 b_2 A + a_2 b_1 A + a_0 b_2 A_1 + a_1 b_1 A_1 + a_2 b_0 A_1) + C[2a_1^2(AA_1 + BB_1) + 2a_0 a_1(A_1^2 + B_1^2) + 4a_0 a_2(AA_1 + BB_1) + 2a_1 a_2(A^2 + B^2)]$$

$$d_4 = (b_2^2 + 2b_1 b_3) + 2(a_1 b_3 A + a_2 b_2 a + a_0 b_3 A_1 + a_1 b_2 A_1 + a_2 b_1 A_1) + C[a_1^2(A_1^2 + B_1^2) + a_2^2(A^2 + B^2) + 2a_0 a_2(A_1^2 + B_1^2) + 4a_1 a_2(AA_1 + BB_1)]$$

$$d_5 = 2b_2 b_3 + 2(a_2 b_3 A + a_1 b_3 A + a_2 b_2 A_1) + C[2a_2^2(AA_1 + BB_1) + 2a_1 a_2(A_1^2 + B_1^2)]$$

$$d_6 = b_3^2 + 2a_2 b_3 A_1 + a_2^2 C(A_1^2 + B_1^2)$$

可按如下方法求解参数对 (x, y)：在适当选取的频率 ω 下，解关于 y 的 6 次方程(16)，得出 6 个解，分别代入式(15)，得相应的 x．然后，根据参数变换公式 $k_{\rm p} = x$，$k_{\rm i} = xy$ 解得参数对 $(k_{\rm p}, k_{\rm i})$．所需要的解应该是落在参数稳定域(令 $M \to \infty$ 可得)内的实数解．对适当选取的频率范围，参数对($k_{\rm p}(\omega), k_{\rm i}(\omega)$)在稳定域内描绘出一条满足敏感传递函数界 $M>1$ 的曲线.

3　仿真实例

考虑单容水箱传递函数[9]

$$G(s) = \frac{1.6}{120s+1}{\rm e}^{-20s}$$

在图 1 所示控制系统中，采用式(8)给定的分数阶 PI$^\lambda$ 控制器，文献[8]讨论了 PI$^\lambda$ 控制器分数阶次 λ 与($k_{\rm p}, k_{\rm i}$)平面上参数稳定域的面积大小之间的关系，结论是 λ 越小，稳定域面积越大．选取 $\lambda = 0.2$，根据前两节的讨论，选取足够大的 M 值，可得($k_{\rm p}, k_{\rm i}$)平面上的参数稳定域，如图 2 中的虚线所示．再分别取 $M = 8$ 和 $M = 1.46$，落在稳定域内的实数解描绘出的曲线分别如图 2 中两条实线所示．根据式(5)和式(6)，$M = 1.46$ 对应的相角裕度约为 40°，幅值裕度约为 11 dB．沿 $M = 1.46$ 的曲线取点 A(见图 3)，再在曲线内部取点 B，分别作阶跃响应，如图 4 所示．由于 B 点对应的相角裕度大，相应的阶跃响应的超调小．另外，由于控制器的积分阶次较小($\lambda = 0.2$)，阶跃响应存在一定的稳态误差，可以采用其他方法进行补偿.

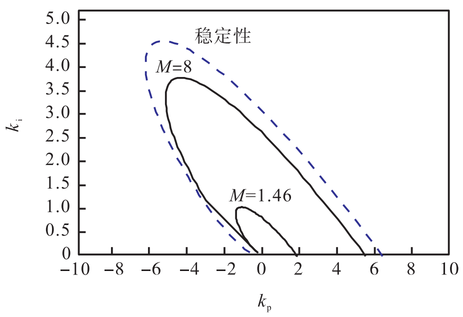

图 2　不同 M 对应的敏感约束

Fig. 2　Sensitivity constraint for different M

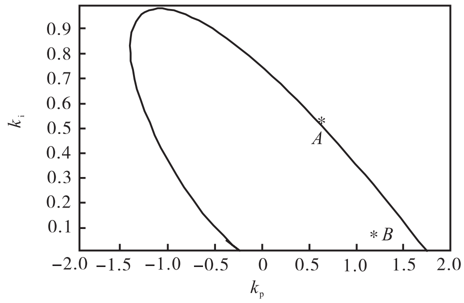

图 3　$M = 1.46$ 对应的敏感约束

Fig. 3　Sensitivity constraint for $M = 1.46$

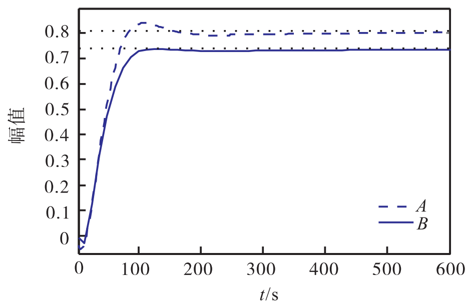

图 4　A、B 两点对应的阶跃响应

Fig. 4　Step responses corresponding to A and B

4　结　语

本文给出了一种分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的图解参数整定方法，即基于敏感传递函数界的参数整定方法．该

（下转第 74 页）