第 27 卷 第 2 期
2012 年 4 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol.27 No.2
Apr. 2012

# 非线性随机混杂系统的鲁棒耗散控制

夏国坤[1]，林忠伟[2]
（1. 天津科技大学理学院，天津 300457；2. 华北电力大学控制与计算机工程学院，北京 102206）

**摘 要**：针对一类带有多维噪声的带范数有界不确定项的非线性随机混杂系统，通过构造随机跳变系统的随机耗散性理论，给出了该类系统的耗散性定义、耗散不等式，以及系统保证耗散性的充分条件. 在此基础上，针对带范数有界不确定项的非线性随机混杂系统，进行鲁棒状态反馈耗散控制，即通过求解线性矩阵不等式，设定状态反馈鲁棒控制器，使得在此控制作用下闭环系统满足耗散性.

**关键词**：非线性系统；随机系统；混杂系统；鲁棒控制
**中图分类号**：O231 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6510（2012）02-0074-05

## Robust Dissipative Control of Nonlinear Stochastic Hybrid System

XIA Guokun[1]，LIN Zhongwei[2]
（1. College of Science，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300457，China；
2. School of Control and Computer Engineering，North China Electric Power University，Beijing 102206，China）

**Abstract**：Aimed at a class of nonlinear stochastic hybrid systems with norm-bounded uncertainties under multi-dimensional Wiener noise，the dissipativity definition，the dissipative inequality and the sufficient conditions of dissipativity were determined，through establishing a corresponding stochastic dissipativity theory. Based on this dissipativity theory，the robust state-feedback dissipative control of the nonlinear stochastic hybrid system with norm-bounded uncertainties was designed，that is，through solving a set of linear matrix inequalities（LMIs），the robust state-feedback dissipative control can be worked out to guarantee the dissipativity of a closed-loop system.

**Key words**：nonlinear systems；stochastic systems；hybrid systems；robust control

近年来，针对 Markov 跳变系统、Itô 微分系统的随机 $H_\infty$控制得到广泛关注[1–10]. 其中，文献[2]针对线性随机 Itô 系统讨论了 $H_\infty$控制问题，并得到以 LMIs 形式的有界实引理，为 $H_\infty$滤波器、$H_2/H_\infty$控制等相关问题的研究奠定了基础. 但对于非线性随机系统领域，仍有大量有待解决的问题. 文献[8]利用耗散性理论讨论了非线性随机 $H_\infty$控制. 文献[9]基于 Lyapunov-Krasovskii 函数方法，针对非线性随机时滞跳变系统，设计无记忆状态反馈耗散控制器. 事实上，通过定义不同的供给率，耗散性理论可以反映相应的系统性质，见文献[10–11].

从 20 世纪 60 年代针对线性跳变系统的二次最优控制研究至今，跳变系统已得到了广泛关注. 其各模态之间的随机切换符合一定的统计特性——有限状态空间中各个模态之间的转移服从 Markov 跳变过程，因而被视为一类特殊的随机系统. 近 30 年针对线性跳变系统的稳定性分析和控制器、滤波器设计已有大量的重要成果[3,5,12]. 尤其是针对该类系统设计状态反馈控制器来满足稳定性、$H_\infty$指标或保代价控制等问题已有较好结果.

同时，许多研究人员致力于研究带范数有界不确定项的跳变系统，又称混杂系统. 工程领域中的大量受随机突变影响的动态系统，如制造系统、电力系统以及网络通信系统等，均可由这类系统表示. 针对该类系统的稳定性、镇定控制、$H_\infty$控制和滤波等问题已得到大量结果[13].但目前针对非线性随机混杂系统的耗散性应用研究仍需做进一步的研究.

本文研究一类带多维 Wiener 噪声的非线性随机

**收稿日期**：2011–10–09；**修回日期**：2011–12–13
**作者简介**：夏国坤（1978—），女，吉林人，讲师，xiagk@tust.edu.cn.

混杂系统的鲁棒耗散控制问题. 针对该类系统提出了耗散不等式及存储函数等定义，给出了相应的广义随机 Lur'e 等式，并针对带范数有界不确定项的随机混杂系统进行耗散控制器设计，给出基于 LMIs 的充分条件.

为简洁起见，采用如下符号：$\boldsymbol{x}'$：向量 $\boldsymbol{x}$ 的转置；$C^2(U)$：关于 $\boldsymbol{x}\in U$ 二次连续可微的函数 $V(x)$；$\mathbf{R}^n$：$n$ 维实 Euclidean 空间；$\boldsymbol{I}$：带恰当维数的单位矩阵；$\|\boldsymbol{x}\|$：向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的 2-范数.

令 $(\Omega,F,\{F_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 表示给定的完备概率空间. $w_\sigma(t)$ 表示该空间上的 $\sigma$ 维标准的 Wiener 过程，其中 $\sigma\in\{1,2,\cdots,M\}$. 令 $r_t$ 表示 Markov 跳变过程，其转移速率矩阵为 $\boldsymbol{\varPi}=(\lambda_{ij})$，$F_t$ 表示 Wiener 过程生成的信息流. 假设跳变参数在系统运行阶段任意时间可完全量测，且 $r_t$ 与 $w_\sigma(t)$ 为相互独立的随机过程. $L_F^2(R^+,R^{n_y})$ 表示所有可测函数 $y(t)\in\boldsymbol{R}^{n_y}$ 所构成的空间，其关于任意 $t\geqslant 0$ 均为 $F_t$-可测，满足 $\|\boldsymbol{y}\|_{L_F^2(R^+,R^{n_y})}:=[E\int_0^\infty\|y(t)\|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}<\infty$. 类似地，可定义 $L_F^2([s,T],R^{n_y})$，$\forall T\geqslant s\geqslant 0$.

$\{r_t,t\geqslant 0\}$ 是连续时间 Markov 跳变过程，取值于有限集合 $\phi=\{1,2,\cdots,N\}$，描述系统各模态间切换过程满足如下转移概率

$$P[r_{t+h}=j\,|\,r_t=i]=\begin{cases}\lambda_{ij}h+o(h), & i\neq j\\ 1+\lambda_{ii}h+o(h), & i=j\end{cases}$$

其中 $\lambda_{ij}$ 为从模态 $i$ 切换至模态 $j$ 的转移速率. 当 $i\neq j$ 时，$\lambda_{ij}\geqslant 0$，$\lambda_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\lambda_{ij}$，$o(h)$ 满足 $\lim\limits_{h\to 0}o(h)/h=0$.

考虑如下带多维 Wiener 噪声和 Markov 跳变过程 Itô 类随机微分方程表示的非线性随机跳变系统：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},r_t)+\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x},r_t)\boldsymbol{d}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},r_t)\boldsymbol{u})\mathrm{d}t+\\ \qquad\sum\limits_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{h}_\sigma(\boldsymbol{x},r_t)\mathrm{d}w_\sigma\\ \qquad\boldsymbol{f}(0,r_t)=0,\ \boldsymbol{h}_\sigma(0,r_t)=0,\sigma\in\{1,2,\cdots,M\}\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x},r_t)\quad \boldsymbol{m}(0,r_t)=0\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 表示系统状态向量，$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 表示系统初始状态，$w_\sigma(t)$ 是 $\sigma$ 维标准 Wiener 过程，$\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^{n_z}$ 表示系统输出，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^{n_u}$ 表示系统控制输入，$\boldsymbol{d}(t)\in\mathbf{R}^{n_d}$ 表示系统外部干扰输入. 因此，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 共同组成了系统的总输入 $\boldsymbol{v}(t)\in\mathbf{R}^{n_v}$，其为关于 $F_t$ 的适应可测过程，即 $\boldsymbol{v}\in L_F^2([s,T],R^{n_v})$. 为简洁起见，当 $r_t=i$ 时，用 $\boldsymbol{f}_i$ 表示 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},i)$，其余类似. $\boldsymbol{f}_i$，$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{h}_{\sigma i}$，$\boldsymbol{m}_i$ 和 $\boldsymbol{k}_i$ 均满足局部 Lipschitz 和线性增长性条件，从而保证系统(1)有唯一强解[4–5].

下面将运用上述结论，针对带范数有界不确定项的混杂系统，讨论鲁棒状态反馈耗散控制问题. 考虑带如下参数的带范数有界不确定项的混杂系统(1)：当 $r_t=i$ 时，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},r_t)=(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}(i,t))\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x},r_t)=\boldsymbol{B}_{1i}$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},r_t)=\boldsymbol{B}_i$，$\boldsymbol{h}_\sigma(\boldsymbol{x},r_t)=(\boldsymbol{C}_{\sigma i}+\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t))\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x},r_t)=\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{x}$. 其中，$\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{B}_{1i}$，$\boldsymbol{B}_i$，$\boldsymbol{C}_{\sigma i}$，$\boldsymbol{M}_i$ 为带恰当维数的已知矩阵，$\Delta\boldsymbol{A}(i,t)$，$\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t)$ 为具有如下结构的矩阵 $\Delta\boldsymbol{A}(i,t)=\boldsymbol{H}_{Ai}\boldsymbol{F}_A(i,t)\boldsymbol{E}_{Ai}$，$\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t)=\boldsymbol{H}_{C\sigma i}\boldsymbol{F}_{C\sigma}(i,t)\boldsymbol{E}_{C\sigma i}$，非线性部分 $\boldsymbol{F}_A(i,t)$，$\boldsymbol{F}_{C\sigma}(i,t)$ 表示随机系统(1)的不确定项. 假设 $\boldsymbol{F}_A(i,t)$，$\boldsymbol{F}_{C\sigma}(i,t)$ 满足范数有界条件

$$\boldsymbol{F}_A'(i,t)\boldsymbol{F}_A(i,t)\leqslant\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{F}_{C\sigma}'(i,t)\boldsymbol{F}_{C\sigma}(i,t)\leqslant\boldsymbol{I}$$

根据文献[8]中引入的术语，关于系统(1)的函数 $U(\cdot,\cdot):\boldsymbol{R}^{n_v}\times\boldsymbol{R}^{n_y}\to\boldsymbol{R}$ 称为在 $[s,\infty)$ 上的供给率，若对于任意的容许控制 $\boldsymbol{v}(t)\in L_F^2([s,T],\boldsymbol{R}^{n_v})$ 及系统(1)中的 $\boldsymbol{v}(t)$，$i\in\phi$，如下不等式始终成立：

$$E\left[\int_s^T|U(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{y}(t))|\,\mathrm{d}t\,|\,r_s=i\right]<\infty,\ \forall T\geqslant s\geqslant 0$$

**定义 1**　称系统(1)关于供给率 $W$ 是随机耗散的，若存在一组非负连续函数 $V(\boldsymbol{x},i):R^n\to R^+$，使得

$$E[V(\boldsymbol{x}(t),r_t)-V(\boldsymbol{x}(s),r_s)\,|\,r_s=i]\leqslant E\left[\int_s^t W(\boldsymbol{v}(\tau),\boldsymbol{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,|\,r_s=i\right]\tag{2}$$

对任意 $t\geqslant s\geqslant 0$，$\boldsymbol{x}(s)\in\mathbf{R}^n$，$i\in\phi$ 成立.

**注释 1**　这里称函数 $V(\boldsymbol{x},i)$ 为存储函数，式(2)为随机混杂系统(1)的耗散不等式，表明系统内部能量是耗散的. 对于每个 $i\in\phi$，本文中假设存储函数 $V(\boldsymbol{x},i)$，若存在，则属于 $C^2(\mathbf{R}^n)$.

首先给出关于该类系统的广义 Itô 公式[4–6].

**引理 1**(广义 Itô 公式)　假设对于所有的 $i\in\phi$，$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},i)$ 及 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},i)$ 均满足局部 Lipschitz 和线性增长性条件. 考虑如下系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},r_t)\,\mathrm{d}t+\sum_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{\beta}_\sigma(\boldsymbol{x},r_t)\,\mathrm{d}w_\sigma\tag{3}$$

对于给定的 $\Phi(\boldsymbol{x},i)\in C^2(\mathbf{R}^n),\ i\in\phi$，假设存在 $r>0$，使得

$$|\Phi(\boldsymbol{x},i)|+\|\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}}\|+\|\frac{\partial^2\Phi(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}^2}\|\leqslant \boldsymbol{K}(1+\|\boldsymbol{x}\|^r)\tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{K}>0$. 则有

$$E[\Phi(\boldsymbol{x}(T),r_T)-\Phi(\boldsymbol{x}(s),r_s)\,|\,r_s=i]=E\left[\int_s^T L\Phi(\boldsymbol{x}(t),r_t)\mathrm{d}t\,|\,r_s=i\right]$$

其中，$L\Phi:\mathbf{R}^n\times\phi\to\mathbf{R}$ 是关于系统(3)的无穷小算子，定义为

$$L\Phi(\boldsymbol{x},i)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},i)'\Phi_x(\boldsymbol{x},i)+\frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{\beta}_\sigma(\boldsymbol{x},i)'\Phi_{xx}(\boldsymbol{x},i)\boldsymbol{\beta}_\sigma(\boldsymbol{x},i)+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\Phi(\boldsymbol{x},j)$$

给定供给率为 $W(\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}+2\boldsymbol{z}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$，则下列定理给出关于系统(1)的耗散条件，为文献[10]中定理 1 的推广结果.

**引理 2**　系统(1)关于供给率 $W(\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})$ 是随机耗散的充分必要条件是存在一组非负函数 $V_s(\boldsymbol{x},i)\in C^2(\mathbf{R}^n):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$，对于每个 $i\in\phi$，$V_s(0,i)=0$，$\rho_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^q$ 和 $\varpi_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{q\times n_v}$，其中整数 $q>0$，满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}_i'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{m}_i-\dfrac{\partial V_s'(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_i-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{h}_{\sigma i}'\frac{\partial^2V_s(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{h}_{si}-\\ \qquad\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}V_s(\boldsymbol{x},j)=\rho_i'\rho_i\\ 2\boldsymbol{S}'\boldsymbol{m}_i-\boldsymbol{k}_i'\dfrac{\partial V_s(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}}=2\varpi_i'\rho_i\\ \boldsymbol{R}=\varpi_i'\varpi_i\end{cases}$$

现设定系统参数为 $\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{B}_{1i}$，$\boldsymbol{B}_i$，$\boldsymbol{C}_{\sigma i}$，$\boldsymbol{M}_i$，及 $\Delta\boldsymbol{A}(i,t)$，$\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t)$，则对于给定的一组非负函数 $V_s(\boldsymbol{x},i)=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}/2$，由上式可得系统(1)是随机耗散的充分条件为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{M}_i'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}(i,t))\boldsymbol{x}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{x}-\\ \qquad\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{C}_{\sigma i}+\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t))'\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{C}_{\sigma i}+\\ \qquad\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t))\boldsymbol{x}=\rho_i'\rho_i\\ 2\boldsymbol{S}'\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{B}_{1i}'\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}=2\varpi_i'\rho_i\\ \boldsymbol{R}=\varpi_i'\varpi_i\end{cases}$$

此外，上式可被看作是针对非线性随机混杂系统的广义随机 Lur’e 等式.

根据文献[10]中的定理 2，可以给出针对随机跳变系统(1)的耗散性的充分条件.

**引理 3**　考虑系统(1)，给定任意常数 $\gamma>0$，若存在一组非负函数 $V(\boldsymbol{x},i)\in C^2(\mathbf{R}^n):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$，$V(0,i)=0$，$i\in\phi$，满足如下 $N$ 个耦合 HJIs(Hamilton-Jacobi inequalities)，则系统(1)是随机耗散的：

$$H_\infty^1(V(\boldsymbol{x},i)):=\frac{\partial V'(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_i+\frac{1}{2}\boldsymbol{m}_i'\boldsymbol{m}_i+\frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{h}_{\sigma i}'\frac{\partial^2V_s(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{h}_{\sigma i}+\frac{1}{2}\gamma^{-2}\frac{\partial V'(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_i'\frac{\partial V(\boldsymbol{x},i)}{\partial\boldsymbol{x}}+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}V(\boldsymbol{x},j)=0$$

**定义 2**($L_2$ 增益性)　称系统(1)具有 $L_2$ 增益性，若对于给定常数 $\gamma>0$，$\boldsymbol{x_0}=0$，$r_0=i$，$T\geqslant0$，存在一组正定函数 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},i)$，$\boldsymbol{q}(0,i)=0$，使得

$$\|\boldsymbol{z}(t)\|^2_{L_F^2([0,T],R^{n_z})}\leqslant\gamma^2\|\boldsymbol{d}\|^2_{L_F^2([0,T],R^{n_v})}+\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},i)$$

本文目的是设计状态反馈控制 $\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{K}_i\chi_{r_t=i}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{K}_i$ 为一组对应 $i\in\phi$ 的带恰当维数的待定矩阵，$\chi_M$ 表示集合 $M$ 的指示函数. 令 $V(\boldsymbol{x},i)=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{P}_i$ 为一组正定矩阵. 则根据引理 3，闭环系统(1)关于供给率 $(\gamma^2\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d}-\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})/2$ 是随机耗散的充分条件为

$$\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}(i,t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)+(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}(i,t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)'\boldsymbol{P}_i+\sum_{\sigma=1}^{M}(\boldsymbol{C}_{\sigma i}+\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t))'\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{C}_{\sigma i}+\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t))+\gamma^{-2}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{B}_{1i}'\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{M}_i'\boldsymbol{M}_i+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\boldsymbol{P}_j\leqslant0 \tag{5}$$

上式前后均乘以 $\boldsymbol{P}_i^{-1}$，用 $\boldsymbol{X}_i$ 取代 $\boldsymbol{P}_i^{-1}$，$\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{X}_i$，可得

$$(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}(i,t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}(i,t)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)'+\sum_{\sigma=1}^{M}(\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_i+\Delta\boldsymbol{C}(i,t)\boldsymbol{X}_i)'\boldsymbol{X}_i^{-1}(\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_i+\Delta\boldsymbol{C}(i,t)\boldsymbol{X}_i)+\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{B}_{1i}'+(\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{X}_i)'\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{X}_i+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}\boldsymbol{X}_i\leqslant0 \tag{6}$$

定义 $\phi_i(X)$ 和 $\varphi_i(X)$ 为

$$\phi_i(\boldsymbol{X})=\left\{\sqrt{\lambda_{i1}}\boldsymbol{X}_i,\cdots,\sqrt{\lambda_{ii-1}}\boldsymbol{X}_i,\sqrt{\lambda_{ii+1}}\boldsymbol{X}_i,\cdots,\sqrt{\lambda_{iN}}\boldsymbol{X}_i\right\}$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{X})=\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{i-1},\boldsymbol{X}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{X}_N\right\}$$

则

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{-1}\boldsymbol{X}_i=\lambda_{ii}\boldsymbol{X}_i+\phi_i(\boldsymbol{X})\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{X})\phi_i'(\boldsymbol{X}) \tag{7}$$

根据 Schur 补引理，式(6)可表示为

$$\begin{bmatrix}J_1(i) & (\boldsymbol{C}_{\sigma i}\boldsymbol{X}_i+\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t)\boldsymbol{X}_i)' & \boldsymbol{B}_{1i} & (\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{X}_i)' & \phi_i(\boldsymbol{X})\\ \boldsymbol{C}_{\sigma i}\boldsymbol{X}_i+\Delta\boldsymbol{C}_\sigma(i,t)\boldsymbol{X}_i & -\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{B}_{1i}' & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0\\ \phi_i'(\boldsymbol{X}) & 0 & 0 & 0 & -\varphi_i(\boldsymbol{X})\end{bmatrix}\leqslant0 \tag{8}$$

其中

$$J_1(i)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i'+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i+\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{B}_i'+\Delta\boldsymbol{A}(i,t)\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\Delta\boldsymbol{A}(i,t)'+\lambda_{ii}\boldsymbol{X}_i$$

上式等价于

$$\boldsymbol{\varGamma}+\boldsymbol{\varUpsilon}_1\boldsymbol{F}_A\boldsymbol{\varUpsilon}_2'+\boldsymbol{\varUpsilon}_2\boldsymbol{F}_A'\boldsymbol{\varUpsilon}_1'+\sum_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{\varUpsilon}_3\boldsymbol{F}_{C\sigma}\boldsymbol{\varUpsilon}_4'+\sum_{\sigma=1}^{M}\boldsymbol{\varUpsilon}_4\boldsymbol{F}_{C\sigma}'\boldsymbol{\varUpsilon}_3'\leqslant 0 \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{\varGamma}=\begin{bmatrix} J_2(i) & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{\sigma i}' & \boldsymbol{B}_{1i} & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{M}_i' & \phi_i(\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{C}_{\sigma i}\boldsymbol{X}_i & -\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B}_{1i}' & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 \\ \phi_i'(\boldsymbol{X}) & 0 & 0 & 0 & -\varphi_i(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix}$$

且

$$J_2(i)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i'+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i+\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{B}_i'+\lambda_{ii}\boldsymbol{X}_i$$

$$\boldsymbol{\varUpsilon}_1=[\boldsymbol{H}_{Ai},0,0,0,0]'$$

$$\boldsymbol{\varUpsilon}_2=[\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{E}_{Ai},0,0,0,0]'$$

$$\boldsymbol{\varUpsilon}_3=[\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{E}_{C\sigma i},0,0,0,0]'$$

$$\boldsymbol{\varUpsilon}_4=[0,\boldsymbol{H}_{C\sigma i},0,0,0]'$$

易知，对于恰当维数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，任意正数 $\varepsilon$，不等式 $\boldsymbol{\alpha\beta}'+\boldsymbol{\beta\alpha}'\leqslant\varepsilon\boldsymbol{\alpha\alpha}'+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\beta\beta}'$ 始终成立. 据此可知

$$\boldsymbol{\varGamma}+\varepsilon_{1i}\boldsymbol{\varUpsilon}_1\boldsymbol{\varUpsilon}_1'+\varepsilon_{1i}^{-1}\boldsymbol{\varUpsilon}_2\boldsymbol{\varUpsilon}_2'+\varepsilon_{2i}\boldsymbol{\varUpsilon}_3\boldsymbol{\varUpsilon}_3'+\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{\varUpsilon}_4\boldsymbol{\varUpsilon}_4'\leqslant 0 \tag{10}$$

对于正数 $\varepsilon_{1i}$ 和 $\varepsilon_{2i}$ 始终成立.

根据上述结果以及引理 2 和 3 可得如下结论：

**定理 1**　给定 $\gamma>0$，对于 $\varepsilon_{1i}>0$，$\varepsilon_{2i}>0$，假设存在一组矩阵 $\boldsymbol{X}_i>0$ 及 $\boldsymbol{Y}_i$，使得如下 LMIs 对于所有的 $i\in\phi$ 均成立

$$\begin{bmatrix} J_2(i) & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{C}_{\sigma i}' & \boldsymbol{B}_{1i} & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{M}_i' & \phi_i(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{E}_{Ai}' & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{E}_{C\sigma i}' \\ \boldsymbol{C}_{\sigma i}\boldsymbol{X}_i & -\boldsymbol{X}_i+\varepsilon_{2i}\boldsymbol{H}_{C\sigma i}\boldsymbol{H}_{C\sigma i}' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B}_{1i}' & 0 & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ \phi_i'(\boldsymbol{X}) & 0 & 0 & 0 & -\varphi_i(\boldsymbol{X}) & 0 & 0 \\ \boldsymbol{E}_{Ai}\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{1i} & 0 \\ \boldsymbol{E}_{C\sigma i}\boldsymbol{X}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{2i} \end{bmatrix}\leqslant 0 \tag{11}$$

其中

$$J_2(i)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i'+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i+\boldsymbol{Y}_i'\boldsymbol{B}_i'+\varepsilon_{1i}\boldsymbol{H}_{Ai}\boldsymbol{H}_{Ai}'+\lambda_{ii}\boldsymbol{X}_i$$

则 $\boldsymbol{u}_\infty^*=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{X}_i^{-1}\chi_{r_t=i}\boldsymbol{x}$ 为系统(1)的鲁棒耗散控制，保证了闭环系统的耗散性及 $L_2$ 增益性.

**注释 2**　$L_2$ 增益性是系统的 $H_\infty$ 控制所要保证的目标之一[9]. 此外，还须保证闭环系统的内部稳定性. 实际上若 $\boldsymbol{M}_i'\boldsymbol{M}_i>0$，结合定理 1 可得耗散控制 $\boldsymbol{u}_\infty^*$ 同时也是系统(1)的 $H_\infty$ 控制.

**参考文献：**


[1] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State-space solutions to standard $H_2$, $H_\infty$ control problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(8): 831–847.

[2] Hinrichsen D, Pritchard A J. Stochastic $H_\infty$[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1998, 36: 1504–1538.

[3] Shi P, Boukas E K. $H_\infty$-control for Markovian jumping linear systems with parametric uncertainty [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 95(1): 75–99.

[4] Drăgan V, Morozan T. Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems [M]. New York: Springer, 2006.

[5] Mao X, Yuan C. Stochastic Differential Equations with Markovian Switching[M]. London: Imperial College Press, 2006.

[6] Lewin M. On the boundedness, recurrence and stability of solutions of on ito equation perturbed by a Markov chain [J]. Stochastic Analysis and Applications, 1986, 4(4): 431–487.

[7] Limebeer D J N, Anderson B D O, Hendel B. A Nash game approach to mixed $H_2/H_\infty$[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(1): 69–82.

[8] Berman N, Shaked U. $H_\infty$-like control for nonlinear stochastic systems [J]. Systems & Control Letters, 2005, 55(3): 247–257.

[9] Xu L J, Zhang T P, Yi Y. Robust dissipative control for uncertain stochastic systems with Markovian switching and time-varying delay [J]. Journal of Southeast University: Natural Science Edition, 2010, 40(s1): 198–205.

[10] Willems Jan C. Dissipative dynamical systems part I: General theory [J]. Archive for Rational Mechanics and

Analysis, 1972, 45(5): 321–353.
[11] Van der Schaft A J. $L_2$- gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback $H_\infty$ control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(6): 770–784.
[12] Li X, Zhou X Y, Rami M A. Indefinite stochastic linear quadratic control with markovian jumps in infinite time horizon [J]. Journal of Global Optimization, 2003, 27(2/3): 149–175.
[13] Boukas E K. Stochastic Hybrid Systems: Analysis and Design[M]. Boston: Birkhauser, 2005.

责任编辑：周建军

（上接第 43 页）

参考文献：

[1] 王萍，张银波，江木兰. 多不饱和脂肪酸的研究进展[J]. 中国油脂，2008，33(12)：42–46.
[2] 鲍建民. 多不饱和脂肪酸的生理功能及安全性[J]. 中国食物与营养，2006(1)：45–46.
[3] 王海燕，李睿. 功能性不饱和脂肪酸研究进展[J]. 肉类研究，2010，142(12)：14–17.
[4] 钟耀光. 功能食品[M]. 北京：化学工业出版社，2004.
[5] Gutiérrez-Rodríguez A E, Medina-Pérez M A, Martínez-Trinidad J F, et al. New dissimilarity measures for ultraviolet spectra identification[J]. Advances in Pattern Recognition, 2010, 6256: 220–229.
[6] 解华东，布丽君，李志西. 基于紫外指纹图谱技术的食醋品种检测方法[J]. 农业机械学报，2009，40(4)：133–138.
[7] 孟庆华，王微波，胡育筑. 紫外光谱相似度及其在中药注射液质量控制中的应用[J]. 中国中药杂志，2007，32(3)：206–210.
[8] 邹华彬，袁久荣，王伟. 中药指纹图谱共有峰的理论识别：W 检验判别方法[J]. 世界科学技术：中医药现代化，2004，6(2)：50.
[9] 邹华彬，袁浩，王爱武，等. 白芍紫外指纹图谱共有峰率和变异峰率双指标序列分析[J]. 光谱学与光谱分析，2007，27(9)：1815–1819.

责任编辑：郎婧