



Cesaro 函数空间 CES_p 的依测度收敛的 Opial 性质和强端点

于非非, 李 君

(天津科技大学理学院, 天津 300457)

摘 要: 依测度收敛的 Opial 性质为函数空间所特有, 验证了 Cesaro 函数空间 $CES_p (1 < p < \infty)$ 有依测度收敛的 Opial 性质, 证明了 $\forall z \in S(CES_p)$ 都是 $B(CES_p)$ 的强端点, 进而证明了 $CES_p (1 < p < \infty)$ 是中点局部一致凸的.

关键词: Cesaro 函数空间 $CES_p (1 < p < \infty)$; Opial 性质; 强端点; 中点局部一致凸

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6510(2012)03-0075-04

Strongly Extreme Points and Opial Property in Measure in Cesaro Function Space CES_p

YU Feifei, LI Jun

(College of Science, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300457, China)

Abstract: The Opial property in measure belongs to function space, and it is discussed in connection with $CES_p (1 < p < \infty)$, based on the theory of the Banach function space. At the same time, the fact is proved that $\forall z \in S(CES_p)$ is the strongly extreme point of $B(CES_p)$, and the conclusion is that space $CES_p (1 < p < \infty)$ is the mid-point locally uniform rotund.

Key words: Cesaro function spaces $CES_p (1 < p < \infty)$; Opial property in measure; strongly extreme point; mid-point locally uniform rotund

Opial 于 1967 年^[1]引入了 Opial 性质的概念, 这一性质蕴含不动点性质, 这样的 Opial 性质为序列空间所独有. 1996 年王廷辅等^[2]讨论了 Orlicz 序列空间的 Opial 性质. 对于函数空间, 作者在文献^[3]中引入了函数空间中的新概念——依测度收敛的 Opial 性质, 并且讨论了 Orlicz 函数空间 L_M 中依测度收敛的 Opial 性质的等价叙述, 给出了 L_M 中依测度收敛的 Opial 模的计算公式.

Cesaro 函数空间 CES_p 是全体定义在 $(0, +\infty)$ 并具有有限范数

$$\|f\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

的可测函数 $f(x)$ 所构成的空间, 其中 $1 < p < \infty$. 对于该空间的性质讨论并不多, 1987 年 Polly 等^[4]论证了 CES_p 是可分的 Banach 空间, 在等价范数意义下讨论

了共轭空间; 2003 年刘郁强^[5]用实值序列空间的方法研究了 Cesaro 函数空间的几何性质, 其中就论证了 Cesaro 函数空间严格凸但非一致凸; 2008 年 Astashkin 等^[6]证明了 CES_p 不具有不动点性质, 2011 年^[7]又讨论了 CES_p 的同构问题.

定义 1 函数空间 X 称为具有依测度收敛的 Opial 性质, 如果对 $\forall \{x_n\} \subset X$, $x_n \xrightarrow{\mu} 0$ 及 $\forall x \neq 0$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

不影响讨论结果的情况下简记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

定义 2 $x \in S(X)$ 称为 $B(X)$ 的强端点, 如果 $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset X$, $x_n + y_n = 2x (n=1, 2, 3, \dots)$, $\|x_n\| \rightarrow 1$, $\|y_n\| \rightarrow 1$, 蕴含 $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

定义 3 如果 $S(X)$ 中的任一点均为 $B(X)$ 的强

端点, 则 X 是中点局部一致凸的.

本文论证了 CES_p 在上述范数意义下具有依测度收敛的 Opial 性质; 证明了 $\forall z \in S(CES_p)$ 都是 $B(CES_p)$ 的强端点, 进而证明了 $CES_p (0 < p < \infty)$ 是中点局部一致凸的. 这样的论证对于该函数空间几何性质、点态性质的完善具有重要意义. 有关 Banach 空间的几何理论及常见记号见参考文献[8]

定理 1 Cesaro 函数空间 $CES_p (1 < p < \infty)$ 具有依测度收敛的 Opial 性质.

证明 已知 $\{f_n\} \subset CES_p$, 且 $\|f_n\| = 1 (n=1, 2, \dots)$, $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. 对于 $\forall f \in CES_p$ 满足 $\|f\| = \eta > 0$, 往证

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n + f\| > \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 1$$

因为 $\|f_n\| = 1$, 且易见 $\|f_n + f\| \leq 1 + \eta$, 所以对于 $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{1}{5}\eta$), 当 a 充分大时, 结合收敛无穷积分的性质, $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

$$\left\{ \int_a^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) + f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\left\{ \int_a^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\left\{ \int_a^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{5}$$

易见

$$\|f\|_{(0,a)} > \eta - \frac{\varepsilon}{5} > 0$$

又 $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ 于 $(0, \infty)$, 当然有 $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ 于 $(0, a)$. 由叶果洛夫定理, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 总存在 $E_n \subset (0, a)$ 满足 $\mu E_n < \frac{1}{n}$, 在 $(0, a) \setminus E_n$ 上一致的有

$$f_n(t) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

且

$$\left\{ \int_{E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{5}$$

于是容易得到

$$\left\{ \int_{(0,a) \setminus E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{5} \quad (1)$$

所以在区间 $(0, a)$ 有

$$\begin{aligned} \|f_n + f\|_{(0,a)} &= \left\{ \int_0^a \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) + f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &\left\{ \int_{(0,a) \setminus E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) + f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ &\left\{ \int_{E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) + f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2)$$

由空间理论知识及式(1)知

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{(0,a) \setminus E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t) + f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \\ &\left\{ \int_{(0,a) \setminus E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} - \\ &\left\{ \int_{(0,a) \setminus E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \\ &\left\{ \int_{(0,a) \setminus E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} - \frac{\varepsilon}{5} > \\ &\eta - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned} \quad (3)$$

而 n 充分大时, 总有

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{E_n} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &\left\{ \int_{(0,\infty) \setminus (a,\infty) \setminus [(0,a) \setminus E_n]} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \\ &1 - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned} \quad (4)$$

结合式(2)–(4)有

$$\begin{aligned} \|f_n + f\|_{(0,a)} &\geq \eta - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} + 1 - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \\ &1 + \eta - \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\|f_n + f\| \geq \|f_n + f\|_{(0,a)} \geq 1 + \eta - \varepsilon > 1$$

这也就证明了

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n + f\| > \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 1$$

即 $CES_p (1 < p < \infty)$ 具有依测度收敛的 Opial 性质.

定理 2 $\forall z \in S(CES_p)$ 都是 $B(CES_p)$ 的强端点.

即: 对 $\{x_n\} \subset CES_p$, $\{y_n\} \subset CES_p$, $x_n + y_n = 2z$
 $(n=1, 2, 3, \dots)$, $\|x_n\| \rightarrow 1$, $\|y_n\| \rightarrow 1$, 蕴含 $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$
 $(n \rightarrow \infty)$

证明 由已知条件, $\forall t \in (0, \infty)$, 有

$$2z(t) = x_n(t) + y_n(t) \quad (n=1, 2, \dots)$$

记

$$s_n(t) = \begin{cases} 1 & x_n(t) + y_n(t) = 2z(t) > 0 \\ -1 & x_n(t) + y_n(t) = 2z(t) < 0 \\ 1 & x_n(t) + y_n(t) = 2z(t) = 0 \end{cases}$$

于是从一方面容易得到

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x y_n(t) s_n(t) dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |y_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1 \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x x_n(t) s_n(t) dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |x_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (5)$$

另一方面有

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x x_n(t) s_n(t) dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x [x_n(t) s_n(t) + y_n(t) s_n(t) - y_n(t) s_n(t)] dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x 2|z(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} - \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |y_n(t) s_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 2 - 1 = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

从而综合式(5)、(6)得到

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x x_n(t) s_n(t) dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1 \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x y_n(t) s_n(t) dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1 \\ & \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x z(t) s_n(t) dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \end{aligned}$$

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |z(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = 1$$

显然有

$$2z(t) s_n(t) = x_n(t) s_n(t) + y_n(t) s_n(t) \quad (n=1, 2, \dots)$$

令

$$\omega(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |z(t)| dt = \frac{1}{x} \int_0^x z(t) s_n(t) dt$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x} \int_0^x x_n(t) s_n(t) dt$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{x} \int_0^x y_n(t) s_n(t) dt$$

易见

$$\omega \in L^p(0, \infty)$$

$$\{\varphi_n\} \in L^p(0, \infty), \{\psi_n\} \in L^p(0, \infty) \quad (n=1, 2, \dots)$$

而且

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) + \psi_n(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x [x_n(t) + y_n(t)] s_n(t) dt = 2\omega(x) \\ &\quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

由式(5)、(6)知 $\|\varphi_n\|_{L^p} \rightarrow 1$, $\|\psi_n\|_{L^p} \rightarrow 1$, 于是结合 $L^p(0, \infty)$ 空间性质得到

$$\|\varphi_n - \psi_n\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

即 $\left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |x_n(t) s_n(t) - y_n(t) s_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$ 进而得到

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} \int_0^x |x_n(t) - y_n(t)| dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

这样就证明了 $\forall z \in S(CES_p)$ 都是 $B(CES_p)$ 的强端点.

推论 Cesaro 函数空间 CES_p ($1 < p < \infty$) 是中点局部一致凸的.

关于函数空间 CES_p ($1 < p < \infty$) 的其他点态性质、几何性质及各种几何常数的讨论, 有待于大量研究工作予以完善.

参考文献:

- [1] Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, 73(4): 591-597.
- [2] 王廷辅, 崔云安. Orlicz 序列空间的 Opial 性质[J]. 应用数学, 1996, 9(3): 392-394.

- [3] 于非非,崔云安. Orlicz 函数空间的依测度收敛的 Opial 性质[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2002, 19(1): 6-9.
- [4] Polly Wee Sy, Zhang Wenyao, Lee Peng Yee. The dual of Cesaro function spaces [J]. Glasnik Matematički, 1987, 22(42): 103-112.
- [5] 刘郁强. Cesaro 函数空间的几何性质[J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2003(4): 1-4.
- [6] Astashkin S V, Maligranda L. Cesaro function spaces fail the fixed point property [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2008, 136(12): 4289-4294.
- [7] Astashkin S V, Maligranda L. Geometry of Cesaro function spaces [J]. Functional Analysis and Its Applications, 2011, 45(1): 64-68.
- [8] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1985: 213-301.

责任编辑: 周建军

(上接第 67 页)

最大特征值的数值作为判定扬声器是否故障的阈值, 根据表 1 选择特征值阈值为 4 200.

为验证以上方法的可靠性, 检验另外 100 个同型号扬声器, 其中 80 个为合格扬声器, 20 个为故障扬声器. 经实验验证, 合格扬声器中有 2 个的特征值大于阈值, 故障扬声器有 1 个的特征值小于阈值, 本次实验的正确率为 97%.

可以看出仍然存在误检情况. 可以考虑, 对于特征值与阈值相差不大于 5 的扬声器采用人工复检方式排查, 以减少误检.

5 结 语

本文设计了一种基于激光位移传感器的扬声器异音故障检测系统, 对系统结构、工作原理、检测过程进行了介绍. 本系统通过采集纸盆中心振动位移信号进行检测, 可有效地避免环境噪声对系统的影响. 对于不同型号扬声器在进行扬声器故障检测时, 首先统计一定样本的特征值, 将略大于合格扬声器最大特征值的阈值作为判断扬声器是否故障的依据. 实验表明, 对于本次实验, 运用本文方法, 重复实验

结果均可达到 97% 的正确率, 为扬声器异音故障检测提供了一种实用方法.

参考文献:

- [1] 张再荣. 扬声器纯音检听及故障分析[J]. 电声技术, 2000(8): 31-33.
- [2] Wang Hongxing, Xu Zengpu, Zhou Congling, et al. Study on the Features of Loudspeaker Sound Faults [C]//2009 Pacific-Asia Conference on Knowledge Engineering and Software Engineering. Piscataway: IEEE, 2009: 155-158.
- [3] 王晓嘉, 高隼, 王磊. 激光三角法综述[J]. 仪器仪表学报, 2004, 25(s2): 601-604.
- [4] 袁秀丽. 激光三角法测量技术在光刻机中的应用[J]. 电子工业专用设备, 2010(5): 34-37.
- [5] 刘本永. 非平稳信号分析导论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [6] 王思俊. 基于时频分析的扬声器故障在线检测方法研究[D]. 天津: 天津科技大学机械工程学院, 2008.
- [7] 贺兴华. MATLAB7.x 图像处理[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2006.

责任编辑: 常涛

(上接第 70 页)

- [3] 石为人, 黄兴华, 周伟. 基于改进人工势场法的移动机器人路径规划[J]. 计算机应用, 2010, 30(8): 2021-2023.
- [4] 周毅, 崔刚. 基于机器视觉和 A*算法的迷宫机器人路径规划[J]. 微计算机信息, 2010, 26(3-2): 155-156.
- [5] 朱耿青. A*算法实现及其应用[J]. 福建电脑, 2008(2): 74-75.
- [6] 熊伟, 张仁平, 刘奇韬, 等. A*算法及其在地理信息系统中的应用[J]. 计算机系统应用, 2007(4): 14-17.
- [7] Russell S, Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach[M]. 3rd. Upper Saddle River: Prentice Hall Press, 2009.
- [8] 陈刚, 付少锋, 周利华. A*算法在游戏地图寻径中的几种改进策略研究[J]. 科学技术与工程, 2007, 7(15): 3731-3736.

责任编辑: 常涛