



## 纵向波纹通道内充分发展层流传热的近似解

师晋生

(天津科技大学机械工程学院, 天津 300222)

**摘要:** 对两纵向波纹平板形成的通道内的定热流边界条件下的传热, 采用一级摄动, 以壁面波纹的波幅为摄动小量建立模型. 将一级摄动温度分作两个线性叠加的部分, 分别求解, 得到了温度以及传热特性的渐近解. 据此研究了传热特性与壁面波纹特性的关系. 研究发现, 壁面波纹本身以及两板波纹的组合都对这种情况下的壁面传热特性产生着多重影响.

**关键词:** 波纹通道; 充分发展; 层流流动; 传热; 摄动

**中图分类号:** TK124      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-6510(2012)06-0052-05

### An Approximate Analytic Solution to the Fully Developed Laminar Heat Transfer inside a Longitudinally Wavy Channel

SHI Jinsheng

(College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

**Abstract:** A theoretical study of fully developed laminar heat transfer inside a channel made of two parallel wavy plates and with constant wall heat flux was conducted through perturbation on the amplitude of the wall surface wave. The energy equation was resolved at leading approximation by lineally separating the first order temperature into two parts. An asymptotic solution to the heat transfer was then obtained. The effects of the wavy channel walls on the heat transfer characteristics were discussed. The conclusion is that both the wall waves and their combinations play a dramatic role in the heat transfer behavior.

**Key words:** wavy channel; fully developed; laminar flow; heat transfer; perturbation

在能源、动力、化工、轻工、制冷等很多工业领域的换热设备中, 经常采用波纹板表面以增加设备的强度及增强其传热传质性能. 在波纹板通道内的流动传热中, 按照设计目的的不同, 流体介质的流动方向与壁面波纹的变化方向既有垂直也有平行. 对这两种类型的流动和传热已经有很多数值计算<sup>[1-2]</sup>和实验研究<sup>[3-5]</sup>. 然而, 在已有的研究中, 无论介质的流动方向是平行还是垂直于波纹方向, 波纹壁面的几何参数都是一样的. 在两块波纹板形成的二维流道内, 当上下波纹板的波纹的振幅、频率不相同, 流动和传热特性会有什么样的表现, 这方面的研究还鲜有报道.

通道截面在流动方向保持恒定不变, 而其几何形状为圆形、矩形、三角形以及其他一些简单情况下的充分发展层流流动与传热可以采用传统经典理论进

行研究, 且早已成为定论写入了教科书<sup>[6]</sup>. 但是, 当流体通道截面变为其他复杂一点的形状时, 经典方法往往难以奏效, 因而长期以来采用计算机数值计算来解决复杂形状边界通道内的流动与传热就成为学术界与工程界的主流. 然而, 采用摄动法或变分法, 仍然可以得到某些复杂形状边界通道内的流动与传热的近似解析解<sup>[7-8]</sup>, 只是长期以来没有受到重视而已. 开展这方面的研究无论是对经典理论的深化完善还是对工程实践的应用参考都有重要的探索和借鉴意义.

为此, 本文选择纵向波纹通道内的定型层流传热为研究对象, 以壁面波纹的波幅与通道平均高度的比值为摄动参数建立简化分析模型, 对壁面不同波纹参数对传热特性的影响进行探索. 在本次研究中, 壁面

收稿日期: 2012-05-07; 修回日期: 2012-06-15

基金项目: 天津市应用基础研究计划面上项目(07JCYBJC01300)

作者简介: 师晋生(1964—), 男, 山西河津人, 副教授, shijs@tust.edu.cn.

波纹为正弦型形状，壁面边界条件为定热流，流体沿着壁面波纹作充分发展定型层流流动，也就是流通截面在流动方向上恒定不变。

### 1 数理模型

考虑两块水平纵向放置的正弦形状的波纹板之间的充分发展的层流定热流受热的流体为考察对象，模型及其坐标如图 1 所示， $z$  轴在下板波纹的中线上。上下板热流密度恒定相等，每个截面温度均匀。在这种情况下，流体只沿纵向即  $x$  方向作等速流动，此流速沿  $y, z$  坐标而变。分别以  $u, p, t, \mu, a, k, n$  和  $q_w$  表示流体的速度、压力、温度、动力黏度、热扩散系数、导热系数、壁面法线方向和壁面热流密度。则流动、传热的控制方程及其边界条件为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{u}{a} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y = A \cos(2\pi z / l_1) \\ y = h + B \cos(2\pi z / l_2), \\ u = 0 \\ -k \partial t / \partial n = q_w \end{cases} \quad (3)$$

式(1)和式(2)在  $z$  方向的边界条件，为分别以  $l_1$  和  $l_2$  为周期的周期性条件，即在  $z$  坐标上，在周期性的位置上，各相应量及其各阶导数相等。在充分发展的定热流边界条件下，分别以  $t_m$  和  $t_w$  表示流体沿通道截面的平均温度和壁面温度，有

$$\partial t / \partial x = \partial t_m / \partial x = \partial t_w / \partial x$$

然后，以上下板为平行的平直板即板上没有波纹时的情况为比较基准，设平直板通道内的流体在相同的压力梯度作用下也作充分发展层流流动，壁面上受到定热流条件加热，使其沿  $x$  方向也作相同速率的温度变化。设在平直板情况下， $y-z$  平面沿  $z$  方向单位长度上，介质的体积流量为  $v_0$ ，壁面上的热流密度为  $q_{w0}$ 。

以两板间距  $h$  为特征长度、 $v_0/h$  为特征速度、 $\mu v_0/h^2$  为特征压力、 $q_{w0}h/k$  为特征温度，将坐标、速度、压力和温度无量纲化，以各量的大写表示，则控制方程及边界条件成为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = 2U \quad (5)$$

$$\begin{cases} Y = \varepsilon \cos(\lambda_1 Z) \\ Y = 1 + \eta \varepsilon \cos(\lambda_2 Z) \\ U = 0 \\ \partial T / \partial N = -q_w / q_{w0} \end{cases} \quad (6)$$

在波纹板情况下，假定  $A/h = \varepsilon$  为一小量， $B/h = (B/A) \times (A/h) = \eta \varepsilon$ ， $\eta$  为一数量级为 1 的参数，为上板波纹与下板波纹波幅之比。设  $\lambda_1 = 2\pi h/l_1$ ， $\lambda_2 = 2\pi h/l_2$ ， $N$  为波纹板法线方向。

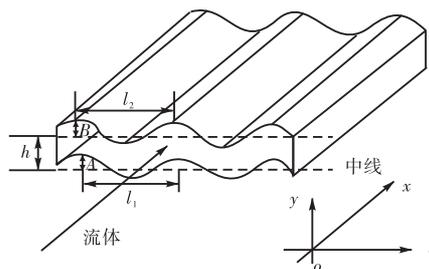


图 1 波纹板通道  
Fig. 1 Wavy wall channel

### 2 求解方法

按传热学的常规作法，在壁面定热流条件下，将每个截面壁面上的温度设为均匀相等。将流体温度首先分成两个部分，一部分为壁面温度  $T_w(X)$ ，只随流动方向  $X$  坐标而变化，另一部分为以壁面温度为基准的截面上的温度  $\tau(Y, Z)$ ，只沿  $Y, Z$  坐标而变。将无量纲温度写成如下形式：

$$T(X, Y, Z) = T_w(X) + \tau(Y, Z) \quad (7)$$

再将无量纲流速  $U$  和分温度  $\tau$  展开成下列形式：

$$U(Y, Z) = U_0(Y) + \varepsilon U_1(Y, Z) + \varepsilon^2 U_2(Y, Z) + \dots \quad (8)$$

$$\tau(Y, Z) = \tau_0(Y) + \varepsilon \tau_1(Y, Z) + \varepsilon^2 \tau_2(Y, Z) + \dots \quad (9)$$

而  $T_w(X)$  就成为  $X$  方向的线性函数，其随  $X$  的变化率可简单地由壁面上的热流率和流体的流率决定。下面对流动方程及截面上的能量方程分别求解。

#### 2.1 流动方程组

因为垂直于流动方向的横截面的大小和方向都恒定不变，因而沿流动方向即  $X$  方向的压力梯度也恒定不变。将式(8)代入式(4)和式(6)，按近似等级展开微分方程，将边界条件按泰勒级数展开，转换到  $Y = 0$  和  $Y = 1$  处。取一级近似，分别得零级方程组：

$$U_{0YY} - P_X = 0 \quad (10)$$

$$Y = 0 \text{ 及 } Y = 1, U_0 = 0 \quad (11)$$

和一级方程组:

$$U_{1YY} + U_{1ZZ} = 0 \tag{12}$$

$$\begin{cases} Y=0, U_1 + \cos(\lambda_1 Z)U_{0Y} = 0 \\ Y=1, U_1 + \eta \cos(\lambda_2 Z)U_{0Y} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

以上方程中,脚标中的第一个数字表示零级或一级近似速度,第二位及后边的字母表示对 Y 或 Z 坐标求一阶和二阶偏导.

求解零级动量方程得

$$U_0 = \frac{1}{2} P_x (Y - Y^2) \tag{14}$$

设一级流速为

$$U_1(Y, Z) = F_1(Y) \cos(\lambda_1 Z) + F_2(Y) \cos(\lambda_2 Z) \tag{15}$$

代入其方程及边界条件可得

$$U_1(Y, Z) = \frac{1}{2} P_x \left[ \frac{\text{sh}(\lambda_1(Y-1)) \cos(\lambda_1 Z)}{\text{sh} \lambda_1} + \frac{\eta \text{sh}(\lambda_2 Y) \cos(\lambda_2 Z)}{\text{sh} \lambda_2} \right] \tag{16}$$

### 2.2 能量方程组

将式(7)和式(9)代入能量方程及其边界条件,考虑分温度  $\tau$  的定义,分别得零级能量方程及其边界条件:

$$\tau_{0YY} = 2U_0 \tag{17}$$

$$Y=0 \text{ 及 } Y=1, \tau_0 = 0 \tag{18}$$

一级能量方程及其边界条件:

$$\tau_{1YY} + \tau_{1ZZ} = 2U_1 \tag{19}$$

$$\begin{cases} Y=0 \\ \tau_1 + \cos(\lambda_1 Z)\tau_{0Y} = 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} Y=1 \\ \tau_1 + \eta \cos(\lambda_2 Z)\tau_{0Y} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

由零级能量方程可得

$$\tau_0 = \frac{1}{12} P_x (-Y + 2Y^3 - Y^4) \tag{22}$$

又设一级温度为

$$\tau_1(Y, Z) = \tau_{11}(Y, Z) + \tau_{12}(Y, Z) \tag{23}$$

令  $\tau_{11}$  满足方程:

$$\tau_{11YY} + \tau_{11ZZ} = 0 \tag{24}$$

$$\begin{cases} Y=0 \\ \tau_{11} + \cos(\lambda_1 Z)\tau_{0Y} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} Y=1 \\ \tau_{11} + \eta \cos(\lambda_2 Z)\tau_{0Y} = 0 \end{cases} \tag{26}$$

$\tau_{12}$  满足方程:

$$\tau_{12YY} + \tau_{12ZZ} = 2U_1 \tag{27}$$

$$Y=0 \text{ 及 } Y=1, \tau_{12} = 0 \tag{28}$$

对  $\tau_{11}$ , 设

$$\tau_{11}(Y, Z) = M_1(Y) \cos(\lambda_1 Z) + M_2(Y) \cos(\lambda_2 Z)$$

代入式(24)——(26), 有

$$M_1'' - \lambda_1^2 M_1 = 0 \tag{29}$$

$$\begin{cases} Y=0, M_1 = -\tau_{0Y} \\ Y=1, M_1 = 0 \end{cases} \tag{30}$$

和

$$M_2'' - \lambda_2^2 M_2 = 0 \tag{31}$$

$$\begin{cases} Y=0, M_2 = 0 \\ Y=1, M_2 = -\eta \tau_{0Y} \end{cases} \tag{32}$$

解得

$$M_1(Y) = -\frac{P_x}{12 \text{sh} \lambda_1} \text{sh} \lambda_1 (Y-1) \tag{33}$$

及

$$M_2(Y) = -\frac{\eta P_x}{12 \text{sh} \lambda_2} \text{sh} \lambda_2 Y \tag{34}$$

于是

$$\begin{aligned} \tau_{11}(Y, Z) = & -\frac{P_x}{12 \text{sh} \lambda_1} \text{sh} \lambda_1 (Y-1) \cos(\lambda_1 Z) - \\ & \frac{\eta P_x}{12 \text{sh} \lambda_2} \text{sh} \lambda_2 Y \cos(\lambda_2 Z) \end{aligned} \tag{35}$$

对  $\tau_{12}$ , 根据 Y 方向的边界条件, 知其固有函数为  $\sin(n\pi Y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 故可设

$$\tau_{12}(Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{3n}(Z) \sin(n\pi Y) \tag{36}$$

将方程(27)右边也展开成固有函数级数, 可得

$$\begin{aligned} M_{3n}''(Z) - n^2 \pi^2 M_{3n}(Z) = & -P_x n \pi [\cos(\lambda_1 Z) / (\lambda_1^2 + n^2 \pi^2) + \\ & \eta \cos(n\pi) \cos(\lambda_2 Z) / (\lambda_2^2 + n^2 \pi^2)] \end{aligned} \tag{37}$$

令

$$M_{3n}(Z) = c_{1n} \cos(\lambda_1 Z) + c_{2n} \cos(\lambda_2 Z) \tag{38}$$

代入式(37), 解得其系数

$$\begin{cases} c_{1n} = \frac{P_x n \pi}{(\lambda_1^2 + n^2 \pi^2)^2} \\ c_{2n} = \frac{\eta P_x n \pi \cos(n\pi)}{(\lambda_2^2 + n^2 \pi^2)^2} \end{cases} \tag{39}$$

### 2.3 传热特性

得到流速及温度分布后, 就可以得到流体与壁面

之间的传热特性:

$$\alpha = -\frac{k\partial T/\partial n|_w}{t_w - t_m}$$

$$Nu = \alpha h/k = -\frac{\partial T/\partial N|_w}{T_w - T_m}$$

$$-\frac{\sqrt{(\partial T/\partial Y)^2 + (\partial T/\partial Z)^2}|_w}{T_w - T_m} \quad (40)$$

$$Nu_m = \int_0^L NudL \quad (41)$$

式(41)中的  $L$  为板上波纹一个周期的无量纲长度,  $L_1 = l_1/h$ ,  $L_2 = l_2/h$ .

充分发展情况下的流动及传热特性不受流动及加热工况的影响, 其流动特性可参见文献[9], 本文主要关注传热特性. 图 2、图 3 分别描绘了不同波纹参

数情况下, 定型层流传热工况下, 在横截面上的温度分布以及沿上下两板的平均努谢尔特的变化. 两个板的无量纲波数相同时, 就用一个  $\lambda$  表示; 不同时, 下板用  $\lambda_1$  表示, 上板用  $\lambda_2$  表示.

在图 2 中, 沿垂流动方向的横截面上, 从下边波纹板到上边波纹板, 沿  $Y$  方向将  $Y$  坐标分成 400 份. 从图 2 可以看出, 横截面上的温度沿  $Z$  方向呈周期性变化, 这和波纹板在  $Z$  方向的波纹变化相对应. 随上下板波纹参数及其组合的不同, 沿  $Y$  方向各高度处的温度在  $Z$  方向的波动呈现出较大差异. 有的工况近壁处波动大, 有的工况内层波动大. 图 2(c) 也显示出, 在上下板无量纲波数不同, 就是波纹频率不同时, 横截面各高度处的温度沿  $Z$  方向的波动周期也表现出不同, 靠近壁面的高度处的温度沿  $Z$  方向的分布受壁面的影响增大.

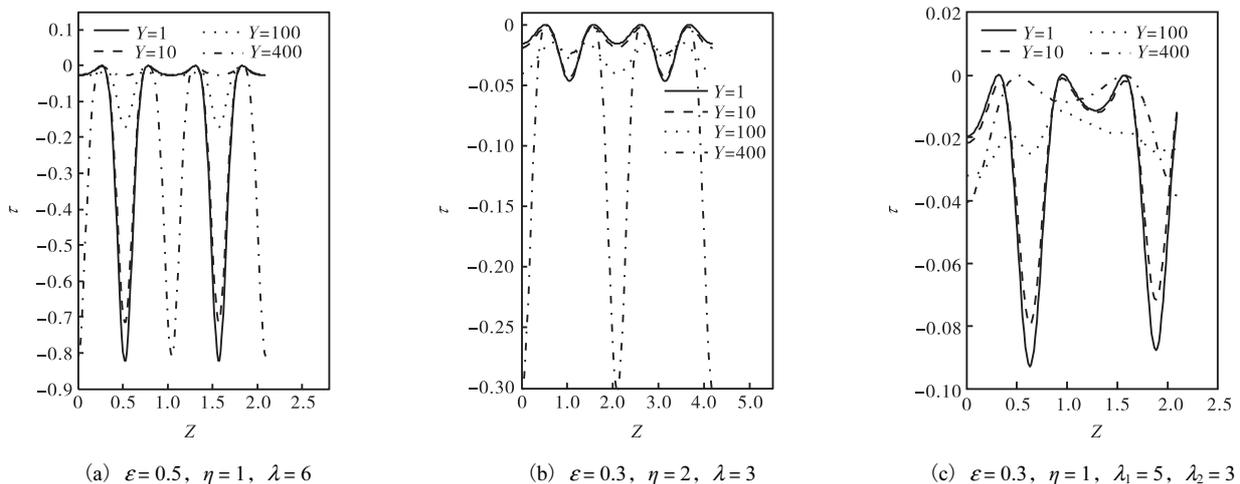


图 2 流通横截面上的温度分布

Fig. 2 Temperature distribution on the cross section

图 3 的 3 个视图表示了上板和下板上的平均努谢尔特的数受板的波幅、波数以及两板波纹的相对差异的影响.

由图 3(a) 可以看出, 在两个板的波数  $\lambda$  相同, 即其在  $Z$  方向的波纹密度相同的情况下, 上板波纹幅度相对于下板波纹幅度增大时, 两个板上的传热强度出现较大差别. 随着上板波纹幅度相对于下板幅度增大, 上板上的平均努谢尔特的数增大, 下板上的降低. 随着  $\epsilon$  增大, 上板的努谢尔特的数先增大后下降, 出现一个峰值, 随  $\epsilon$  增大, 此一峰值趋于提前出现, 下板上的努谢尔特的数趋于单调降低.

图 3(b) 反映了两板参数相同的情况下, 板上波纹的波数即其密度对传热性能的影响. 可以看出, 在波数较小时, 两板的传热性能较高, 在  $\epsilon$  的中间区

域, 两个板之间传热性能也有较大差异, 随着波数增大, 两者差异渐小, 都趋于降低, 出现峰值的时刻提前.

图 3(c) 描述了两个板在波纹其他参数相同, 而下板波纹密度增大时, 两板上平均传热性能的变化. 可以看出, 下板波纹波数比上板小时, 两个板上的传热强度都较高, 两个板的差别也较大, 上板的传热强度比下板的高. 随着下板上波数的增大, 两板上的传热强度都下降, 差别也减小, 当两板波数相等时, 两板上的传热强度接近. 当下板上的波数超过上板后, 两板的传热强度进一步下降, 但下板上的强度开始超过上板. 传热视图也反映出, 在  $\epsilon$  较小时, 传热强度随  $\epsilon$  增大, 先降低, 然后有一个上升期, 再出现降落.

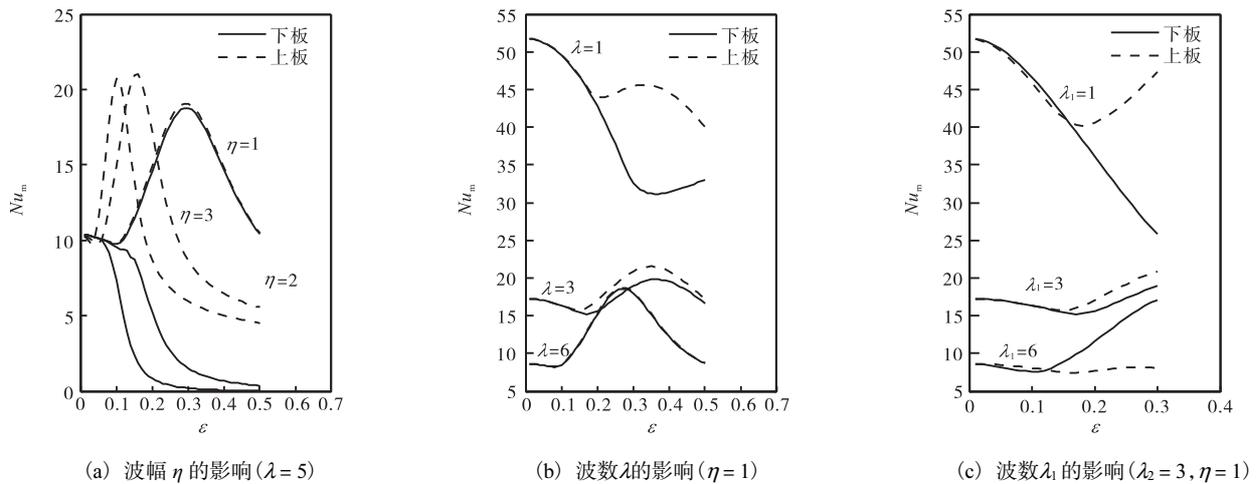


图3 两板上的传热性能  
Fig. 3 Heat transfer characteristics on two plates

### 3 结 语

本文对流体纵向流过两平行波纹板通道内时的定热流加热情况下的定型层流传热进行了理论上的探索,以板上波纹的波幅为扰动量,建立了一级扰动的分析模型,将一级扰动的温度方程分成两个叠加的部分,得到了这种情况下的近似解析解。

两板上的传热性能随波纹的波数亦即其密度的增大而降低,两板传热性能的差异随两板波纹差异的增大而增大。

当两板波纹的波幅不等时,波幅较大板上的传热强度较大,波幅较小板上的传热强度较小。

在波数和两板相对波幅一定的情况下,板上的传热性能随波纹波幅的增大,而出现增大和减小的变化,最大传热强度随波纹参数不同而出现在不同的波幅处,两板波纹差别大时,此峰值出现在波幅较小的地方,差别小时,最大传热峰值出现在波幅较大处。

#### 参考文献:

[1] 谢公南,王秋旺,曾敏,等. 渐扩渐缩波纹通道内脉动流的传热强化[J]. 高校化学工程学报, 2006, 20(1):

31-35.

[2] Tseluiko D, Blyth M G. Effect of inertia on electrified film flow over a wavy wall[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2009, 65(3): 229-242.

[3] 赵镇南, 郝睿. 管内与波纹板通道内冷凝传热和压降关联式[J]. 石油化工设备, 2004, 33(3): 51-55.

[4] 冯殿义, 李玉庚. 纵向双曲波纹管冷凝传热的分析研究[J]. 化工机械, 2001, 28(6): 314-316.

[5] Kwon H G, Hwang S D, Cho H H. Flow and heat/mass transfer in a wavy duct with various corrugation angles in two dimensional flow regimes[J]. Heat Mass Transfer, 2008, 45(2): 157-165.

[6] 杨强生. 对流传热与传质[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985: 48-63.

[7] Malevich A E, Mityushev V V, Adler P M. Couette flow in channels with wavy walls[J]. Acta Mechanica, 2008, 197(3): 247-283.

[8] Wang C Y. Stokes flow in a curved duct-A Ritz method[J]. Computers and Fluids, 2012, 53(1): 145-148.

[9] 师晋生. 波纹通道内充分发展层流流动的简化分析[J]. 热能动力工程, 2010, 25(6): 668-671.

责任编辑: 常涛