

一个分数阶混沌系统的分析及电路设计

贾红艳

(天津科技大学电子信息与自动化学院, 天津 300222)

摘要: 基于一个整数阶的四翼混沌系统, 采用频域近似的方法研究它的分数阶方程, 发现了该分数阶系统的混沌吸引子. 通过对它的分形分析, 观察到较丰富的动力学特性, 即不仅可以观察到混沌吸引子, 而且也能观察到不同周期的周期轨. 最后, 设计一个模拟电路实现了这一分数阶系统, 为该分数阶混沌的应用提供技术上的支持.

关键词: 分数阶混沌系统; 分形分析; 电路设计

中图分类号: TP13 文献标志码: A 文章编号: 1672-6510(2013)01-0055-04

Analysis of and Circuit Design for a Fractional Chaotic System

JIA Hongyan

(College of Electric Information and Automation, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

Abstract: The fractional equation of a four-wing chaotic system was studied and a chaotic attractor was found by using approximation of the frequency domain. More dynamic characteristics were observed through studying its bifurcation. Not only chaotic attractors, but also periodic orbits can be found. At last, an analog circuit was designed to provide technologic support for the application of the fractional chaotic system.

Key words: fractional chaotic system; bifurcation analysis; circuit design

1995 年, Hartley 研究了分数阶 Chua 系统, 在其中发现了混沌吸引子^[1]. 随后在分数阶的 Lorenz 系统中也发现了混沌现象^[2-5]. 进而关于分数阶混沌的研究引起了越来越多的关注. 目前, 在已有的整数阶混沌系统基础上, 通过将整数阶的常微分方程组转换为分数阶次的常微分方程组, 研究其混沌动态, 已经成为分数阶混沌的一个研究热点问题^[6-13]. 但目前对分数阶混沌系统的分析多数是从吸引子相轨迹方面说明混沌吸引子的存在, 而对进一步说明分数阶混沌系统的演化过程的分形分析、从物理意义上验证混沌特性的分数阶混沌系统的电路实现却涉及很少, 这从某种意义上不能完全说明分数阶混沌吸引子的存在.

对于分数阶微分方程, 现在常用的数值方法有频域近似方法和时间域的 Adams-Bash-Moulton 算法. 利用频域近似方法不仅可以求解系统轨迹, 还可以用来设计分数阶的混沌电路. 本文主要采用频域近似方法研究了一个已有的三维四翼混沌系统的分数阶系统的混沌特性. 分别从吸引子相轨迹、随着参

数变化的分形分析和电路设计 3 个方面说明了该分数阶系统的混沌特性, 为分数阶混沌系统的应用提供了技术支持.

1 分数阶三维四翼混沌吸引子

1.1 三维四翼混沌吸引子

最近, Chen 等^[14]提出了一个三维四翼混沌系统, 该系统具有非常丰富的动态特性, 通过仿真分析, 不仅能观察到四翼混沌吸引子, 而且也能观察到三翼混沌吸引子以及不同周期和吸引子形状的周期轨. 随后, Jia 等利用拓扑马蹄引理和模拟电路, 分别从理论上和物理意义上验证了其混沌特性^[15]. 该系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + ky - yz \\ \dot{y} = -by - z + xz \\ \dot{z} = -x - cz + xy \end{cases} \quad (1)$$

式中: $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$; $a, b, c, k \in \mathbf{R}$. 当取 $a = 4.6$, $b = 12$,

收稿日期: 2012-06-18; 修回日期: 2012-09-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11202148); 天津科技大学科学研究基金资助项目(20110124)

作者简介: 贾红艳(1972—), 女, 天津人, 副教授, jiah@tust.edu.cn.

$c=5, k=1$ 时,可观察到一个四翼混沌吸引子,如图1所示.

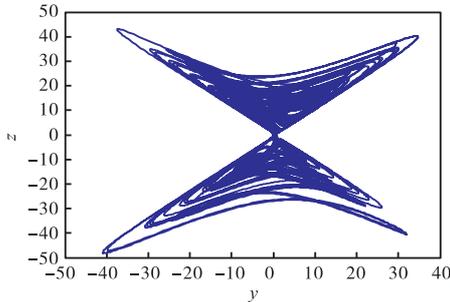


图1 式(1)系统的四翼混沌吸引子

Fig. 1 Four-wing chaotic attractor for the system shown with equation (1)

1.2 分数阶三维四翼混沌吸引子
考虑式(1)系统的分数阶系统

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt} = ax + ky - yz \\ \frac{d^\alpha y}{dt} = -by - z + xz \\ \frac{d^\alpha z}{dt} = -x - cz + xy \end{cases} \quad (2)$$

式中: $a, b, c, k \in R; 0 < \alpha < 1$. 本文中采用分数阶微分的Riemann-Liouville定义:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (3)$$

在该定义下的Laplace变换为

$$L\left[\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right] = s^\alpha L[f(t)] \quad (4)$$

根据文献[1],传递函数 $1/s^\alpha$ 可以用1个近似的整数阶传递函数表示,且误差不会超过2dB.在此主要取 $\alpha=0.9$ 进行研究,应用文献中提供的近似关系:

$$\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{1.766s^2 + 38.27s + 4.914}{s^3 + 36.15s^2 + 7.789s + 0.01} \quad (5)$$

当 $a=5, b=12, c=5, k=1, \alpha=0.9$ 时,将原来的整数阶积分器用式(5)代替,就可以通过仿真观察到一个四翼混沌吸引子的相轨迹,如图2所示.

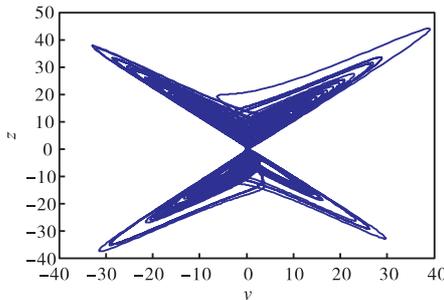


图2 式(2)系统的四翼混沌吸引子

Fig. 2 Four-wing chaotic attractor for the system shown with equation (2)

2 分数阶混沌吸引子的分形分析

然而,仅凭借图2还不能充分说明式(2)系统中存在混沌现象,所以,又对其进行了分形分析,展现了当参数在 $0 < a < 10$ 变化时系统的各种动态行为,进一步说明了其混沌特性.当取 $b=12, c=5, k=1$ 时,通过变化参数 a 可以得到式(2)系统的分岔图,如图3所示.通过对分岔图的分析可以发现,系统出现混沌的区域大致在 $3.8 < a < 8$ 范围内,验证了前面的仿真分析.另外,在 $0 < a < 3$ 这个范围内,系统是稳定的,不会出现混沌吸引子.在 $3 < a < 4, 8 < a < 10$ 这个范围内,系统可能发现不同周期的周期吸引子,如图4所示.通过分岔图及其进一步分析,说明式(2)分数阶系统具有非常丰富的动力学特性,即通过数值仿真分析不仅能观察到混沌吸引子,而且也能观察到各种不同周期的周期吸引子,同时在 $0 < a < 3$ 时,式(2)系统是稳定的.

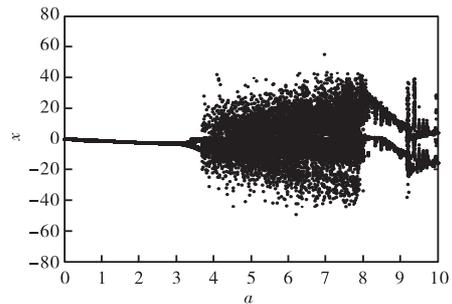
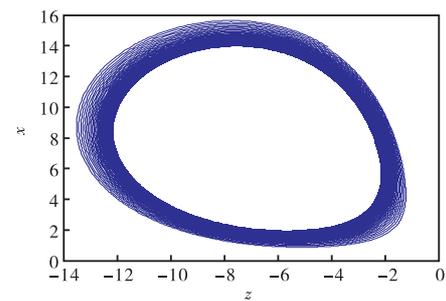
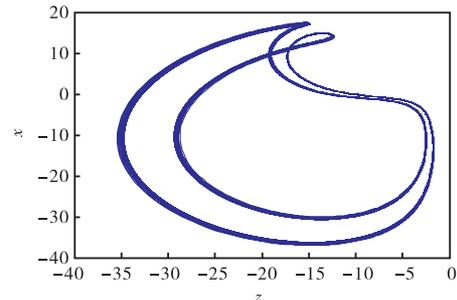


图3 式(2)系统的分岔图

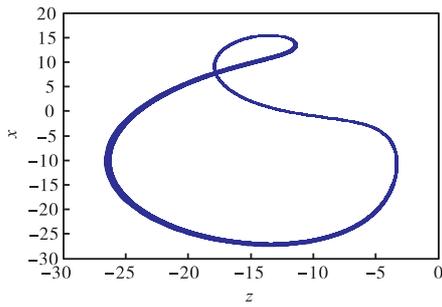
Fig. 3 Bifurcation for the system shown with equation (2)



(a) $a = 3.7$



(b) $a = 8.1$



(c) $a = 8.5$

图4 式(2)系统的部分周期吸引子

Fig. 4 Partial periodic attractors for the system shown with equation (2)

3 分数阶混沌吸引子的电路设计

根据式(2)分数阶系统,采用频域近似法,使用电阻、电容、模拟运算放大器 LF347N 和乘法器 AD633,可以设计一个模拟电路,如图5所示。

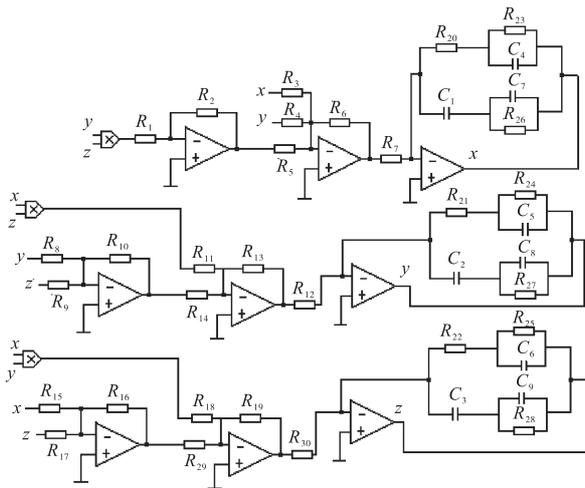
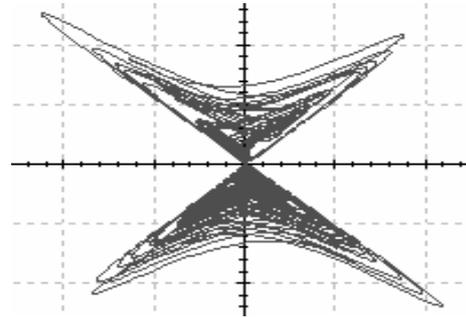


图5 式(2)系统的模拟电路

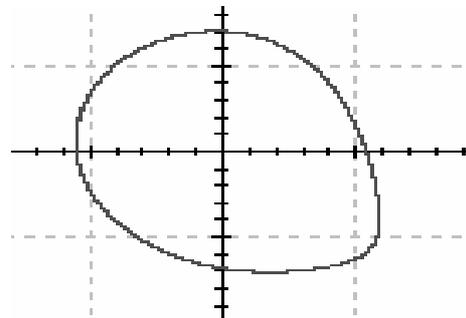
Fig. 5 Analog circuit for the system shown with equation (2)

图5中 $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = R_{10} = R_{11} = R_{13} = R_{14} = R_{16} = R_{18} = R_{19} = R_{29} = 10\text{ k}\Omega$, $R_{17} = 20\text{ k}\Omega$, $R_4 = R_9 = R_{15} = 2.5\text{ k}\Omega$, $R_7 = R_{12} = R_{30} = 1\text{ k}\Omega$, $R_8 = 8.3\text{ k}\Omega$, $R_{20} = R_{21} = R_{22} = 1.55\text{ M}\Omega$, $R_{23} = R_{24} = R_{25} = 61.54\text{ k}\Omega$, $R_{26} = R_{27} = R_{28} = 2.5\text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = C_3 = 0.73\text{ }\mu\text{F}$, $C_4 = C_5 = C_6 = 0.52\text{ }\mu\text{F}$, $C_7 = C_8 = C_9 = 1.1\text{ }\mu\text{F}$. R_3 是可调的,它的阻值根据系统参数 a 的变化调整. 当 R_3 选取不同的阻值时,通过示波器可以观察到各种吸引子的相轨迹,包括四翼混沌吸引子、单周期吸引子、双周期吸引子,分别如图6所示. 通过比较可以发现,式(2)分数阶混沌系统在数值仿真、分形分析和电路实现的结果

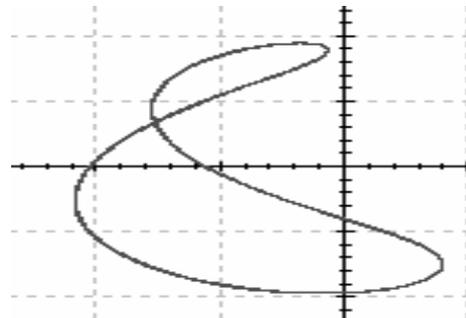
果是一致的。



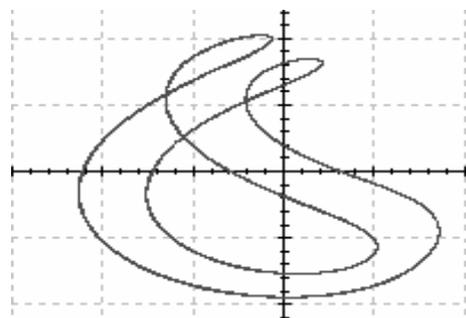
(a) 四翼混沌吸引子 ($R_3 = 20\text{ k}\Omega$)



(b) 单周期吸引子 ($R_3 = 31\text{ k}\Omega$)



(c) 单周期吸引子 ($R_3 = 11\text{ k}\Omega$)



(d) 双周期吸引子 ($R_3 = 12.5\text{ k}\Omega$)

图6 式(2)系统电路实现的相轨迹

Fig. 6 Phase orbits of circuit implementation for the system shown with equation (2)

4 结 语

通过频域近似方法分别从分岔图、吸引子相轨迹和电路设计 3 个方面验证了一个分数阶三维四翼混沌系统中存在的混沌现象. 通过数值仿真分析和电路设计, 同时观察到了较丰富的动力学特性, 即当选取不同的系统参数时, 数值仿真和电路设计都能观察到单周期吸引子和双周期吸引子, 同时也都能观察到四翼混沌吸引子. 对该分数阶混沌系统的研究为分数阶混沌应用提供了丰富的数学模型和技术支持.

参考文献:

- [1] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K. Chaos in a fractional order Chua's system[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1995, 42(8): 485-490.
- [2] Grigorenko I, Grigorenko E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system[J]. Physical Review Letters, 2003, 91(3): 034101/1-034101/4.
- [3] Sun K, Wang X, Sprott J C. Bifurcations and chaos in fractional-order simplified Lorenz system[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(4): 1209-1219.
- [4] Yang Oigui, Zeng Caibin. Chaos in fractional conjugate Lorenz system and its scaling attractors[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(12): 4041-4051.
- [5] Yu, Yongguang, Li Hanxiong, Wang Sha, et al. Dynamic analysis of a fractional-order Lorenz chaotic system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42(2): 1181-1189.
- [6] Zhang Weiwei, Zhou Shangbo, Li Hua, et al. Chaos in a fractional-order Rössler system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42(3): 1684-1691.
- [7] Lu Junguo, Chen Guanrong. A note on the fractional-order Chen system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27(3): 685-688.
- [8] Zhu Hao, Zhou Shangbo, He Zhongsi. Chaos synchronization of the fractional-order Chen's system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 41(5): 2733-2740.
- [9] Lu Junguo. Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization[J]. Physics Letters A, 2006, 354(4): 305-311.
- [10] Wu Xiangjun, Wang Hui. A new chaotic system with fractional system and its projective synchronization [J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 61: 407-417.
- [11] Daftardar-Gejji V, Bhalekar S. Chaos in fractional ordered Liu system[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(3): 1117-1127.
- [12] 陈向荣, 刘崇新, 王发强, 等. 分数阶 Liu 混沌系统及其电路实验的研究与控制[J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1416-1422.
- [13] 刘崇新. 一个超混沌系统及其分数阶电路仿真实验[J]. 物理学报, 2007, 56(12): 6865-6873.
- [14] Chen Zengqiang, Yang Yong, Yuan Zhuzhi. A single three-wing or four-wing chaotic attractor generated from a three-dimensional smooth quadratic autonomous system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38(4): 1187-1196.
- [15] Jia Hongyan, Chen Zengqiang, Qi Quoyuan. Topological horseshoe analysis and the circuit implementation for a four-wing chaotic attractor[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 65: 131-140.

责任编辑: 常涛