第 28 卷 第 5 期
2013 年 10 月

天津科技大学学报
Journal of Tianjin University of Science & Technology

Vol. 28 No. 5
Oct. 2013

考虑装配约束条件有效性的统计公差最优解

刘少岗，刘 超，解瑞建
（天津科技大学机械工程学院，天津 300222）

摘 要：基于负平方形式的加工成本–公差函数和田口质量损失函数，用方和根法建立装配精度约束条件，分别对两种公差优化数学模型采用拉格朗日方法进行求解：第一种模型仅以制造成本最小为目标；第二种模型以制造与质量损失的总成本最小为目标. 分析了装配精度约束条件在以上两种公差优化模型求解过程中的作用：第一种模型的目标函数随着公差的增大而减小，因此装配精度必定为有效约束条件；第二种模型的目标函数未必随着公差的增大而减小，因此装配精度约束不一定是有效约束条件. 推导了第二种模型在装配精度约束条件有效和无效两种情况下公差的解析最优解，并用实例验证了所提出方法的有效性.

关键词：公差设计；制造成本；装配约束；解析解
中图分类号：TH161 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6510（2013）05-0070-05

Optimum Solutions to Statistical Tolerance Based on the Effectiveness of Assembly Constraint

LIU Shaogang，LIU Chao，XIE Ruijian
（College of Mechanical Engineering，Tianjin University of Science & Technology，Tianjin 300222，China）

Abstract：Taking the reciprocal squared manufacturing cost-tolerance function and Taguchi quality loss function into consideration，two tolerance optimization mathematical models were built using the Lagrange Multiplier method，while the root sum square method was used to establish assembly constraint conditions. The objective of the first model was the minimization of manufacturing cost，and the objective of the second model was the minimum sum of manufacturing cost and quality loss cost. Researches were conducted to determine the effectiveness of the assembly constraint. In the first model，the objective function decreased with the increase of component tolerance，and the assembly constraint condition was effective. In the second model，the objective function did not necessarily decrease with the increase of component tolerance，and the assembly constraint condition was not necessarily effective，either. Based on this analytical method，the optimum component tolerance obtained with the effectiveness of the assembly constraint conditions being considered. An example was presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words：tolerance design；manufacturing cost；assembly constraint；analytical solution

公差设计是现代制造业的关键. 面对日益激烈的市场竞争，企业必须努力缩短生产时间、提高产品质量、降低制造成本、提供优质服务、保持清洁环境，全面提升自身的竞争力和可持续发展能力. 作为产品设计过程的重要组成部分，公差对企业竞争力的诸多方面都起着重要的作用，因此公差设计问题引起了学者们的广泛关注[1–14].

公差设计包括公差分析和公差分配两个方面，Singh 等[1–2]对常用的公差分析和公差分配方法进行了总结. 已有的公差设计通常以成本最小为目标，而早期的研究仅注重通过公差设计降低制造成本[3–4]. 后来人们认识到质量的重要性，认为宽松的公差有助于减少制造成本，但降低了产品质量；相反，严格的公差有利于提高产品的质量，但会增加制造成本. 因

收稿日期：2012–11–26；修回日期：2013–04–03
基金项目：天津科技大学科学研究基金资助项目(20100226)
作者简介：刘少岗（1971—），男(回)，河北沧州人，副教授，liusg2006@tust.edu.cn.

此，目前的公差优化设计通常以制造与质量损失总成本最小为目标[5].

建立公差优化模型以后，还需采用恰当的方法进行求解，总体上可以分为数值方法和解析方法两大类. 数值方法适用于当设计函数不是解析表达式或不能求出它关于各设计变量的各阶偏导数时，其应用范围广泛. 有多种数值方法可求解公差优化问题，如非线性规划、整数规划、蚁群算法、粒子群算法、自组织迁移算法等. 解析方法(也称公式法)是可以计算出设计函数的各阶偏导数情况下的公差优化技术，是以特定的函数关系反映成本与最优公差关系的最简单的方法，其计算速度快，求解公差优化问题效率更高. 拉格朗日方法就是求解有约束优化问题常用的方法，能够得到解析形式的最优解. 一些学者基于以制造成本最小为目标的公差优化模型，采用拉格朗日方法求解最优公差的解析解[3,6,9–10]，但是仅考虑了制造成本，没有考虑质量损失成本.

吴文等[11]研究了同时考虑制造成本和质量损失成本的公差优化分配问题，采用拉格朗日方法求解最优公差的解析解，但其未分析装配精度约束条件是否有效.

本文采用拉格朗日方法求解以制造成本最小为目标和以制造与质量损失总成本最小为目标这两种常见的公差优化分配模型，在保证 99.73%的装配成功率情况下，用方和根法建立装配精度约束条件，根据装配精度约束条件有效与否的分析得到不同情况下最优公差的解析表达形式.

1　公差优化的装配精度约束

机械产品由多个零件装配而成、并须达到一定装配精度要求，其尺寸链方程通常可表示为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \tag{1}$$

式中：y 是尺寸链的封闭环；x_i 是相关零件的设计尺寸，作为尺寸链的组成环；n 是尺寸链中组成环的数量. 研究尺寸链中组成环与封闭环之间的关系是公差设计的重要内容，常用的方法包括极值法和统计法. 极值法不考虑零件尺寸在公差带内的分布，只考虑零件尺寸是否在公差带内，产品装配成功率为100%；统计法考虑零件尺寸在公差带内的实际分布，提供了一个较好的封闭环估计，但是它不能保证产品100%的成功率，其装配成功率一般采用 99.73%. 在统计法中，最常用的方法是方和根法[12]. 采用方和根法时，其装配精度约束方程为

$$\Delta_0 = \frac{1}{k_0}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \xi_i^2 \Delta_i^2} \tag{2}$$

式中：Δ_0 为尺寸链封闭环的实际值与理想值之差；k_0 为尺寸链封闭环的相对分布系数；k_i 为设计尺寸 x_i 的相对分布系数；ξ_i 为设计尺寸 x_i 的传递系数，$\xi_i = \partial f / \partial \Delta_i$；$\Delta_i$ 为设计尺寸 x_i 的实际值与理想值之差.

2　两种常见的公差优化目标函数

在公差优化模型中，确定制造成本与公差之间的关系是一个基础性问题，已有大量研究[3–4,13]提出了若干种制造成本–公差模型. 负平方模型是常用的一种制造成本–公差模型，若产品中各零件的制造成本均符合负平方模型，则有

$$C_{\mathrm{M},i} = A_i + \frac{B_i}{\Delta_i^2} \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

式中：$C_{\mathrm{M},i}$ 为尺寸链中第 i 个组成环的制造成本；A_i 和 B_i 为已知参数，A_i 是与公差无关的成本，B_i 是与公差有关的系数，且 $0 < A_i$，$0 < B_i$. 以制造成本最小为目标进行公差优化时，其目标函数为

$$\min C_{\mathrm{M}} = \sum_{i=1}^{n}\left(A_i + \frac{B_i}{\Delta_i^2}\right) \tag{4}$$

公差不仅影响产品的制造过程，还影响产品的使用过程. 因此，在建立公差优化模型时，不仅要考虑制造成本，还应考虑质量损失成本. 根据田口质量损失理论，当零件的实际值与目标值之间存在偏差时，就会产生质量损失，质量损失造成的成本可用二次函数表示. 产品中各零件质量损失的期望和可表示为

$$E_{\mathrm{L}} = \sum_{i=1}^{n} K_i \left[\sigma_i^2 + (\mu_i - m_i)^2\right] \tag{5}$$

式中：K_i 为组成环 x_i 的质量损失系数，$K_i = A_{\mathrm{C},i} / \Delta_{\mathrm{C},i}^2$，$\Delta_{\mathrm{C},i}$ 为已知量，当产品质量特性偏差为 $\Delta_{\mathrm{C},i}$ 时产生的质量损失为 $A_{\mathrm{C},i}$；σ_i、μ_i 和 m_i 分别为组成环 x_i 的方差、期望和目标值. 由于 $\sigma_i = \theta_i \Delta_i$，$\delta_i = \mu_i - m_i$，其中 $0 < \theta_i < 1$，因此有

$$E_{\mathrm{L}} = \sum_{i=1}^{n} K_i \left[(\theta_i \Delta_i)^2 + \delta_i^2\right] \tag{6}$$

以制造与质量损失总成本最小为目标进行公差优化分配时，其目标函数为

$$\min C_{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i+\frac{B_i}{\Delta_i^2}\right)+\sum_{i=1}^{n}K_i\left[(\theta_i\Delta_i)^2+\delta_i^2\right]=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{\Delta_i^2}+K_i\theta_i^2\Delta_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\left[A_i+K_i\delta_i^2\right] \tag{7}$$

3　公差优化模型的解析计算

3.1　仅考虑制造成本时公差优化模型的解析计算

由于各工件的制造成本都随着公差的增大而减少，因此仅以制造成本最小为目标进行公差优化时，在保证装配精度的情况下各组成环的公差越大越有利于降低目标函数，故此时装配精度约束必为有效约束．根据式(4)的目标函数和式(2)的装配精度约束条件，构造如下的 Lagrange 方程：

$$f=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i+\frac{B_i}{\Delta_i^2}\right)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}k_i^2\xi_i^2\Delta_i^2-k_0^2\Delta_0^2\right) \tag{8}$$

式中，λ为未知数．由

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta_i}=-2B_i\Delta_i^{-3}+2\lambda k_i^2\xi_i^2\Delta_i=0 \quad i=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

可得

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_j}=\left(\frac{B_ik_j^2\xi_j^2}{B_jk_i^2\xi_i^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{10}$$

根据式(10)和式(2)，采用方和根法建立装配精度约束并以制造成本最小为目标时，公差优化模型解析解的一般形式为

$$\Delta_i=\frac{B_i^{\frac{1}{4}}}{\left(k_j^2\xi_j^2\right)^{\frac{1}{4}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(B_jk_j^2\xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}k_0\Delta_0 \tag{11}$$

3.2　考虑制造成本和质量损失成本时公差优化模型的解析计算

以制造成本和质量损失成本之和为目标函数的最优公差，可以得到最低的总成本．此模型的目标函数不一定随着公差的增大而减少，装配精度约束也未必是有效约束，需要根据实际情况进行分析．根据式(7)目标函数和式(2)装配约束方程构造 Lagrange 方程：

$$f=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B_i}{\Delta_i^2}+K_i\theta_i^2\Delta_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\left[A_i+K_i\delta_i^2\right]+$$
$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}k_i^2\xi_i^2\Delta_i^2-k_0^2\Delta_0^2\right) \tag{12}$$

式中，λ为未知数．由

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta_i}=-2B_i\Delta_i^{-3}+2K_i\theta_i^2\Delta_i+2\lambda k_i^2\xi_i^2\Delta_i=0$$
$$i=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

可得

$$\Delta_i=\left(\frac{B_i}{K_i\theta_i^2+\lambda k_i^2\xi_i^2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

将式(14)代入式(2)的装配约束方程中，得

$$k_0^2\Delta_0^2=\sum_{i=1}^{n}k_i^2\xi_i^2\left(\frac{B_i}{K_i\theta_i^2+\lambda k_i^2\xi_i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

根据式(15)可计算出λ．此时最优公差的解析解分为有约束和无约束两种情况：

(1)对于有约束的情况，如果$\lambda\geqslant 0$，则表明装配精度为有效约束，将λ代入式(14)中可得到各组成环的最优公差Δ_i．此时，在装配精度约束条件有效的情况下可以采用拉格朗日方法求解最优公差的解析解．

(2)对于无约束的情况，如果$\lambda<0$，则表明装配精度约束为无效约束，此时公差的优化变成了一个无约束优化问题．对式(7)的目标函数方程求偏导数，可得到此时最优公差的解析解为

$$\Delta_i=\left(\frac{B_i}{K_i\theta_i^2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{16}$$

4　实　例

采用文献[14]中介绍的公差设计实例来验证所提出方法的有效性．假设某产品由 3 个零件组成，各零件的加工成本和质量损失成本分别见表 1 和表 2，各零件的传递系数为$\xi_1=\xi_2=\xi_3=1$．

表 1　制造成本数据
Tab. 1　Manufacturing cost data

零件编号	A_i/美元	B_i
1	800	2.064 56
2	180	0.116 11
3	470	0.174 21

表 2　质量损失成本数据
Tab. 2　Quality loss cost data

零件编号	$A_{\mathrm{C},i}$/美元	$\Delta_{\mathrm{C},i}$/mm	θ_i	δ_i/mm
1	2 500	0.190 5	0.25	0.020 32
2	280	0.203 2	0.35	0.025 40
3	800	0.203 2	0.30	0.012 70

Cheng 等[14]基于极值法建立装配精度约束条件，

采用数值优化方法(非线性规划求解器 GAMS/MINOS)求解最优公差值. 本文基于方和根法建立装配精度约束条件,采用解析方法求解该产品的最优公差值.

根据已知数据,建立如下的公差优化模型:

$$C_{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{3}\left(A_i+B_i/\varDelta_i^2\right)+\sum_{i=1}^{3}\left[\left(A_{\mathrm{C},i}/\varDelta_{\mathrm{C},i}^2\right)\times\left(\left(\theta_i\varDelta_i\right)^2+\delta_i^2\right)\right]=1\,450+2.064\,56/\varDelta_1^2+0.116\,11/\varDelta_2^2+0.174\,21/\varDelta_3^2+\left(2\,500/0.190\,5^2\right)\left[\left(0.25\varDelta_1\right)^2+0.020\,32^2\right]+\left(280/0.203\,2^2\right)\left[\left(0.35\varDelta_2\right)^2+0.025\,40^2\right]+\left(800/0.203\,2^2\right)\left[\left(0.30\varDelta_3\right)^2+0.012\,70^2\right] \tag{17}$$

采用方和根法建立的装配精度约束条件为

$$\sqrt{\varDelta_1^2+\varDelta_2^2+\varDelta_3^2}\leqslant 0.266\,7 \tag{18}$$

其中,0.266 7 mm 是封闭环的装配精度要求. 采用解析方法求解该公差优化模型,将已知数据代入式(15),得到 $\lambda=-4.710\,9\times10^5\leqslant 0$,属于装配精度约束条件无效的情况,表明装配精度约束不影响公差的分配,因此利用式(16)计算各组成环的公差. 本文方法计算结果与文献[14]计算结果的对比见表 3.

由表 3 可以看出:本文计算出的各组成环公差均大于文献[14];而各组成环总成本均小于文献[14]. 该计算结果表明:本文所提出的方法能够顺利得到各组成环最优公差的解析解;统计公差法比极值公差法更能够扩大各组成环的公差;由于制造成本随着公差的增加而减小,而质量损失成本随着公差的增大而增大. 因此,本文中各组成环的制造成本均小于文献[14],各组成环的质量损失成本均大于文献[14],但总成本均小于文献[14]中的总成本.

表 3　公差优化计算结果比较

Tab. 3　Comparison of tolerance optimization results

方法	零件编号	$\varDelta_i$ 的最优值/mm	成本/美元		
			制造成本	质量损失成本	总成本
本文	1	0.147 98	894.28	122.73	1 017.01
	2	0.108 74	189.82	14.20	204.02
	3	0.099 97	487.43	20.55	507.98
	求和(方和根法)	0.209 09	1 571.53	157.48	1 729.01
文献[14]	1	0.130 55	921.12	101.83	1 022.95
	2	0.065 28	207.25	7.91	215.17
	3	0.070 87	504.69	11.88	516.57
	求和(极值法)	0.266 70	1 633.06	121.63	1 754.69

5　结　语

本文探讨了如何用解析方法求解公差优化模型. 研究发现,仅以制造成本最小为目标时装配精度约束必为有效约束;然而以制造成本与质量损失成本之和最小为目标建立的公差优化模型的解析求解方法情况较复杂,需要根据不同情况判断装配精度约束条件是否有效,并据此选择不同的计算公式. 推导了以制造与质量损失的总成本最小为目标,在装配精度约束条件有效和无效两种情况下公差的解析最优解,并进行了实例验证.

参考文献:

[1] Singh P K, Jain P K, Jain S C. Important issues in tolerance design of mechanical assemblies. Part 1: tolerance analysis [J]. Journal of Engineering Manufacture, 2009, 223(10): 1225–1247.

[2] Singh P K, Jain P K, Jain S C. Important issues in tolerance design of mechanical assemblies. Part 2: tolerance synthesis [J]. Journal of Engineering Manufacture, 2009, 223(10): 1249–1287.

[3] Chase K W, Greenwood W H, Loosli B G, et al. Least cost tolerance allocation for mechanical assemblies with automated process selection [J]. Manufacturing Review, 1990, 3(1): 49–59.

[4] Dong Z, Hu W, Xue D. New production cost-tolerance models for tolerance synthesis [J]. Journal of Engineering for Industry, 1994, 116(2): 199–206.

[5] 匡兵,黄美发,钟艳如. 尺寸公差与形位公差混合优化分配[J]. 计算机集成制造系统,2008,14(2):398–402.

[6] Jeang A. Optimal tolerance design for product life cycle[J]. International Journal of Production Research, 1996, 34(8): 2187–2209.

[7] Shin S, Kongsuwon P, Cho B R. Development of the parametric tolerance modeling and optimization schemes and cost-effective solutions[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 207(3): 1728–1741.

[8] Di Stefano P. Tolerances analysis and cost evaluation for product life cycle[J]. International Journal of Production Research, 2006, 44(10): 1943–1961.

[9] Cheng K M, Tsai J C. Optimal statistical tolerance allocation of assemblies for minimum manufacturing cost[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 52–54: 1818–1823.

[10] 张大克，李振刚. 公差分配的优化模型及其解析最优解[J]. 天津科技大学学报，2008，23(1)：53–57.

[11] 吴文，张伟社. 基于制造–质量损失成本的公差优化分配法[J]. 长安大学学报：自然科学版，2005，25(3)：89–93.

[12] 王平，沈晓阳. 公差分析中的统计公差方法综述[J]. 工具技术，2008，42(10)：43–46.

[13] 杨将新，吴昭同，顾大强. 基于加工特征的成本–公差模型研究[J]. 工程设计，1995，2(3)：22–24.

[14] Cheng B W, Maghsoodloo S. Optimization of mechanical assembly tolerances by incorporating Taguchi's quality loss function[J]. Journal of Manufacturing Systems, 1995, 14(4): 264–276.

责任编辑：常涛

（上接第 69 页）

表 1 传统设计与优化设计的结果对比

Tab. 1 Comparison of traditional and optimized designs

参数	传统设计			分级优化设计		
	太阳轮	行星轮	内齿轮	太阳轮	行星轮	内齿轮
模数/mm	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
齿数	20	40	100	16	31	80
齿宽/mm	40	38	40	43	43	43
变位系数/mm	0	0	0	0.916	0.272	0.309
V/mm^3	3.77×10^5			2.57×10^5		
d/mm	250			200		

注：V 为太阳轮与行星轮的体积和；d 为内齿轮分度圆直径.

由表 1 可以看出：在承载能力相同的情况下，优化设计结果的外齿轮体积之和明显减少，约减少 32%，内齿轮分度圆直径减少 20%，传动结构的整体体积预计可减少 20%左右.

5 结 论

本文对 NGW 型行星齿轮传动机构的优化设计进行了深入研究. 通过分级优化方法，在体积最小的前提下，实现齿轮单齿啮合区下界点接触应力最小为目标函数的齿轮变位系数的优化选择. 设计实例表明，分级优化方法显著地减小了整体体积，可以节省原材料，降低成本，提高齿轮的啮合性能，同时可以提高传动装置的可靠性和使用寿命.

参考文献：

[1] 史红燕，陈海虹，郑瑜，等. 基于 Matlab 遗传算法对 2K–H(NGW)–Z 混合轮系的优化设计[J]. 机械传动，2011，35(12)：57–59，65.

[2] 陈涛，张琰，王宏亮. 单级 NGW 型齿轮箱基本结构参数的优化设计[J]. 机械工业标准化与质量，2012(3)：34–36.

[3] 冀兆明. NGW 型行星齿轮传动角变位参数的优化选择[J]. 机械设计与制造，1999(1)：31–33.

[4] 钟毅芳，陈柏鸿，王周宏. 多学科综合优化设计原理与方法[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2006.

[5] 汪萍，候慕英. 机械优化设计[M]. 4 版. 北京：中国地质大学出版社，2013.

[6] 龚桂义，陈式椿，王永洁. 渐开线圆柱齿轮强度计算与结构设计[M]. 北京：机械工业出版社，1986.

责任编辑：常涛